А. И. Худобин и Н. И. Худобин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

Учпедгиз · 1955

А. И. ХУДОБИН и Н. И. ХУДОБИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1955

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

VIII КЛАСС

Глава I. Тригонометрические функции острого угла

§ 1. Начальные сведения 5
§ 2. Таблица тригонометрических функций 9
§ 3. Решение прямоугольных треугольников 11
§ 4. Задачи для повторения курса VIII класса 20

IX КЛАСС

Глава II. Тригонометрические функции произвольного аргумента

§ 5. Обобщение понятий угла и дуги 24
§ 6. Измерение дуг и углов 25
§ 7. Тригонометрические функции 27
§ 8. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла 34
§ 9. Формулы приведения 39
§ 10. Графики тригонометрических функций 45

Глава III. Преобразование тригонометрических выражений

§ 11. Формулы сложения и вычитания 51
§ 12. Функции двойного и половинного аргумента 55
§ 13. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и обратно 59

Глава IV. Решение прямоугольных треугольников

§ 14. Таблицы логарифмов тригонометрических функций 65
§ 15. Решение прямоугольных треугольников с применением таблиц логарифмов 67

Глава V. Приложения тригонометрии

§ 16. Приложения тригонометрии к решению и исследованию геометрических задач 68
§ 17. Некоторые другие приложения тригонометрии 74

X КЛАСС

Глава VI. Задачи для повторения и углубления пройденного материала

§ 18. Тригонометрические функции 77
§ 19. Преобразование тригонометрических выражений 79
§ 20. Вычисление числовых значений тригонометрических выражений при помощи математических таблиц 82

Глава VII. Решение косоугольных треугольников

§ 21. Соотношения между сторонами и углами треугольника . . 84
§ 22. Решение косоугольных треугольников с применением таблиц логарифмов 88
§ 23. Задачи, требующие применения тригонометрии 90

Глава VIII. Обратные тригонометрические функции

§ 24. Обратные тригонометрические функции 92
§ 25. Главные значения обратных тригонометрических функций 95
§ 26. Преобразование обратных тригонометрических функций . . 99

Глава IX. Тригонометрические уравнения 105

Глава X. Приложения тригонометрии к решению и исследованию геометрических задач (стереометрия)

§ 27. Параллелепипед 114
§ 28. Призма 118
§ 29. Пирамида 122
§ 30. Усечённая пирамида 137
§ 31. Комбинации многогранников 138
§ 32. Цилиндр 141
§ 33. Конус . . . . . —
§ 34. Усечённый конус 144
§ 35. Комбинации цилиндра и конуса с многогранниками 145
§ 36. Шар и его части 149
§ 37. Комбинации многогранников и круглых тел с шаром . . . 151
§ 38. Тела вращения 158

Таблица для перевода радианной меры в градусную 160
Ответы 161

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник предназначен для учителей средней школы.

Центральное место в сборнике отводится задачам, способствующим прочному и глубокому усвоению основных понятий курса тригонометрии и выяснению идейного содержания этого предмета.

С целью развития у учащихся пространственных представлений, логического мышления и сообразительности, так необходимых им в будущей практической деятельности, в сборнике даётся большое количество задач, в процессе решения которых внимание учащихся сосредоточивается на исследовании решения в зависимости от изменения некоторых параметров.

Вместе с тем сборник содержит достаточный материал для практического применения тригонометрии к решению различных вопросов геометрии, физики, техники; даётся материал для проведения практических работ на местности.

Сборник состоит из десяти глав.

В первую главу включён материал, содержащий начальные сведения о тригонометрических функциях и о решении прямоугольных треугольников в объёме программы по тригонометрии для VIII класса. В конце главы, в § 4, даны задачи для повторения курса тригонометрии VIII класса. Эти задачи рекомендуется решать при изучении дальнейших отделов программы геометрии VIII класса в течение всего учебного года и систематически включать в каждое домашнее задание.

Во II, III, IV и V главах сборника помещён материал, охватывающий все вопросы программы тригонометрии IX класса. При этом: 1) с самого начала вводится радианное измерение углов и тригонометрические функции числового аргумента; 2) в основу тождественных преобразований кладётся понятие области определения тригонометрических функций; 3) упражнения в тождественных преобразованиях подкрепляются уравнениями и задачами, требующими выполнения тех же преобразований; 4) изучение свойств тригонометрических функций основывается на максимальном использовании их графиков.

Глава V содержит задачи на применение тригонометрии к решению и исследованию геометрических задач и некоторые другие приложения тригонометрии.

VI, VII, VIII, IX и X главы содержат материал, соответствующий программным вопросам тригонометрии X класса. В главе VI даны задачи на повторение и углубление пройденного материала, которые рекомендуется решать с начала учебного года параллельно с изучением нового материала.

В главе X дано большое количество задач на применение тригонометрии к решению и исследованию геометрических задач.

Общее количество упражнений и задач, имеющихся в сборнике, позволяет преподавателю свободно подобрать необходимый материал для работы в классе и во внеурочное время, в соответствии с уровнем подготовки учащихся. Значительная часть материала предназначена для использования на устных занятиях.

Сборник является результатом совместной работы двух авторов: А. И. Худобина (средняя школа № 1 г. Сердобска Пензенской области) и Н. И. Худобина (средняя школа № 1 г. Ртищево Балашовской области). При составлении сборника использован личный опыт работы в VIII — X классах средней школы и обширная методическая литература.

Авторы приносят свою глубокую благодарность К. С. Богушевскому, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

Авторы.

ГЛАВА I

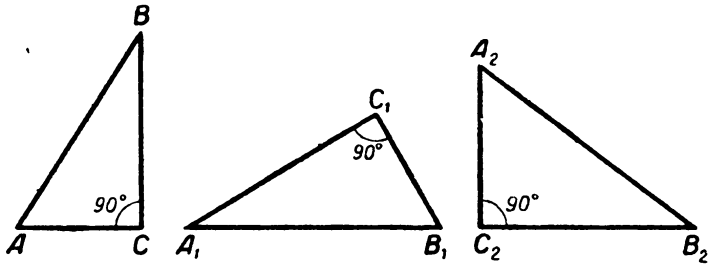
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

§ 1. Начальные сведения

Определения тригонометрических функций

1. Измерить длину сторон прямоугольных треугольников (черт. 1) и вычислить тригонометрические функции углов A и B, A_1 и B_1, A_2 и B_2 с точностью до 0,01.

2. Дан острый угол A. Из какой-либо точки B, взятой на одной из его сторон, опустить перпендикуляр BC на другую

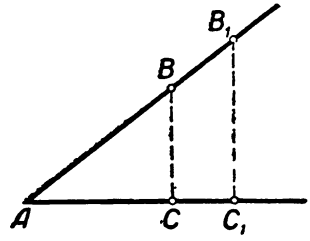


Черт. 1.

сторону (черт. 2). В образовавшемся треугольнике ABC найти $\sin A$, $\cos A$ и $\operatorname{tg} A$.

Взять другую точку B_1, опустить перпендикуляр B_1C_1. В образовавшемся треугольнике AB_1C_1 найти $\sin A$, $\cos A$ и $\operatorname{tg} A$.

Доказать, что значения одноимённых тригонометрических функций не зависят от выбора местоположения точки B на стороне угла.



Черт. 2.

3. Построить углы 15°, 30°, 45°, 60°, 75°.

Путём измерения соответствующих линий найти значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов этих углов (с точностью до 0,01).

4. (Устно.) Может ли синус острого угла быть равным:

1) $\frac{3}{4}$? 2) 0,5? 3) $\frac{5}{3}$? 4) $\frac{8}{11}$? 5) 1,2?

6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$? 7) $\sqrt{3}$? 8) $\frac{3}{4}$ *см*? 9) π*? 10) $m+\frac{1}{m}$?

5. (Устно.) Какие из данных чисел: 0,1; $\frac{2}{3}$; 1; $\frac{5}{2}$; 2,2; $\frac{3}{11}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{2}$; π могут быть: 1) косинусом острого угла? 2) тангенсом острого угла?

6. Доказать, что сумма синусов острых углов прямоугольного треугольника меньше 2.

7. В прямоугольном треугольнике один из углов 30°. Найти $\sin 30°$, не производя измерений.

8. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 45°. Найти $\operatorname{tg} 45°$ и $\operatorname{ctg} 45°$, не производя измерений.

9. (Устно.) Дополнить до прямого угла:

1) 30°; 2) 40°; 3) 45°; 4) 60°; 5) 64°30′;

6) 20°40′; 7) 10°10′; 8) α; 9) $90°-\alpha$; 10) $45°+\alpha$; 11) $45°-\alpha$.

10. Какие углы называются дополнительными?

11. Написать дополнительные углы для следующих углов:

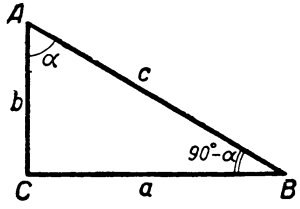
1) 35°; 2) 40°30′; 3) 15°27′; 4) 55°45′;

5) 70°20′; 6) α; 7) $90°-\alpha$.

12. Для следующих углов:

1) $45°-\alpha$; 2) $45°+\alpha$ и 3) $30°+\frac{\alpha}{2}$, где $\alpha<45°$, написать углы дополнительные.

13. Если в прямоугольном треугольнике ABC угол $A=\alpha$, то угол $B=90°-\alpha$ (черт. 3).



Черт. 3.

Пользуясь определениями тригонометрических функций, убедиться в справедливости следующих равенств:

1) $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$;

2) $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$;

3) $\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$;

4) $\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$.

14. Каким должен быть острый угол α, чтобы: 1) синус и косинус его были равны? 2) тангенс и котангенс его были равны?

15. Сходные по названию тригонометрические функции, например синус и косинус, тангенс и котангенс, называются кофункциями.

---

* $\pi\approx 3{,}14$.

Пользуясь этим термином, прочитать равенства, данные в условии задачи 13.

16. (Устно.) Заменить кофункциями следующие тригонометрические функции угла:

1) $\sin 60°$; 2) $\cos 35°$; 3) $\operatorname{tg} 72°$;

4) $\operatorname{ctg} 55°$; 5) $\sin 72°40'$; 6) $\cos 18°10'$;

7) $\operatorname{tg} 33°20'$; 8) $\operatorname{ctg} 82°42'$; 9) $\sin \alpha$.

17. (Устно.) Зная, что $\sin 30° = \frac{1}{2}$, определить $\cos 60°$.

18. (Устно.) Определить $\sin 60°$, если $\cos 30° = 0{,}866$.

19. (Устно.) Известно, что $\operatorname{tg} 66° = 2{,}246$. Для какого угла число 2,246 служит котангенсом?

20. Данные тригонометрические величины выразить через тригонометрические величины углов, меньших 45°:

1) $\cos 80°$; 2) $\operatorname{tg} 68°$; 3) $\sin 76°$; 4) $\operatorname{ctg} 59°30'$.

21. Заменить кофункциями:

1) $\cos(60° - \alpha)$; 2) $\sin(65° - \alpha)$; 3) $\operatorname{tg}(25° + \alpha)$, где $\alpha < 60°$.

22. Упростить: $\sin(90° - \alpha) + 2\sin\alpha - \cos(90° - \alpha)$.

23. Какую величину имеет острый угол α в каждом из следующих равенств:

1) $\sin(50° - \alpha) = \cos(60° - \alpha)$? 2) $\cos(20° + \alpha) = \sin(40° + \alpha)$?

3) $\cos(\alpha - 30°) = \sin(30° + \alpha)$? 4) $\sin(\alpha + 18°) = \cos(12° + \alpha)$?

Изменение тригонометрических функций

24. Как изменяются тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ при уменьшении угла от 90° до 0°?

25. (Устно.) Что больше и почему:

1) $\sin 30°$ или $\sin 31°$? 2) $\cos 25°$ или $\cos 26°$?

3) $\operatorname{tg} 45°$ или $\operatorname{tg} 46°$? 4) $\operatorname{ctg} 60°$ или $\operatorname{ctg} 61°$?

5) $\sin 50°$ или $\cos 50°$? 6) $\cos 35°$ или $\sin 55°$?

26. (Устно.) Дано: $\sin\alpha = \frac{2}{5}$; $\sin\beta = 0{,}6$. Какой угол меньше: α или β?

27. (Устно.) Какие значения можно давать α, чтобы выполнялись неравенства:

1) $\sin 40° > \sin\alpha$; 2) $\cos 72° > \cos\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg} 50°$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg} 25°$;

5) $\sin\alpha > \cos\alpha$; 6) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{ctg}\alpha$.

28. (Устно.) Что больше:

1) синус или тангенс одного и того же острого угла?

2) косинус или котангенс одного и того же острого угла?

29. (Устно.) При каком значении острого угла α справедливо каждое из неравенств:

1) $\sin\alpha < \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha > \frac{1}{2}$; 3) $\cos\alpha < \frac{1}{2}$; 4) $\cos\alpha > \frac{1}{2}$;

5) $\operatorname{tg}\alpha > 1$; 6) $\operatorname{tg}\alpha < 1$; 7) $\operatorname{ctg}\alpha < 1$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha > 1$.

30. (Устно.) Определить знак каждой из следующих разностей:

1) $\sin 45° - \sin 20°$; 2) $\cos 60° - \cos 30°$;

3) $\operatorname{tg} 20° - \operatorname{tg} 21°$; 4) $\sin 45° - \operatorname{tg} 45°$.

31. Расположить в порядке возрастания следующие значения тригонометрических функций:

$$\cos 0°,\ \sin 0°,\ \operatorname{tg} 55°,\ \sin 30°,\ \cos 61°,\ \operatorname{tg} 30°.$$

32. Упростить выражения:

1) $a\sin 0° + b\cos 90°$; 2) $a^2\sin 90° + b^2\cos 0° - 2ab\operatorname{tg} 45°$.

33. Найти значение выражения

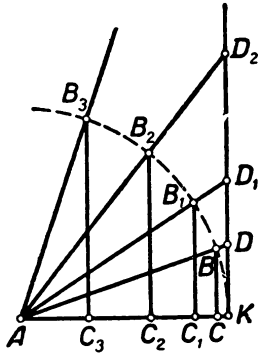
$$\frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \sin(75° - \alpha)}$$

при значении угла α, равном 45°.

34. Найти значение выражения

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

при следующих значениях углов: $\alpha = 30°$ и $\beta = 90°$.



Черт. 4

Вычисление тригонометрических функций данного угла и построение угла по данному значению тригонометрической функции

35. Объяснить, почему:

1) $a\sin\alpha \leqslant a$; 2) $\frac{a}{\sin\alpha} \geqslant a$,

где $a > 0$ и $0° < \alpha \leqslant 90°$.

36. Как изменится число b, если его умножить на тангенс острого угла? Рассмотреть два случая:

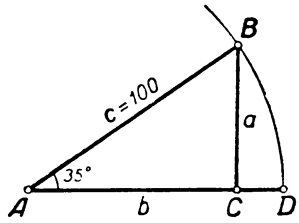
1) $b > 0$; 2) $b < 0$.

37. Какая тригонометрическая функция — синус или тангенс — изменяется быстрее с изменением угла от 0° до 90° (черт. 4)?

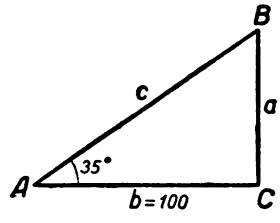
38. С помощью масштабной линейки, циркуля и транспортира построить дугу окружности BD радиуса $c = 100$ *мм* с центральным углом в 35° и опустить перпендикуляр BC на радиус AD (черт. 5). Измерив BC и AC, найти $\sin 35°$ и $\cos 35°$.

39. Найти $\sin 50°$ и $\cos 50°$ (см. задачу 38).

40. Построить прямоугольный треугольник ABC с углом $A = 35$ и прилежащим катетом $b = 100$ *мм* (черт. 6). 1) Измерив катет a, найти $\operatorname{tg} 35°$ и $\operatorname{ctg} 35°$. 2) Использовав результаты измерений в задаче 38, найти $\operatorname{tg} 35°$ и $\operatorname{ctg} 35°$ (черт. 5). Сравнить полученные результаты.



Черт. 5.



Черт. 6.

41. Найти $\operatorname{tg} 58°$ и $\operatorname{ctg} 58°$ (см. задачу 40).

42. Построить углы, синусы которых равны: 1) 0,6; 2) $\frac{3}{4}$; 3) 0,5. Измерить их величину с точностью до 1°.

43. Построить углы, косинусы которых равны: 1) 0,5; 2) 0,7; 3) $\frac{5}{8}$. Измерить их величину с точностью до 1°.

44. Построить углы, тангенсы которых равны: 1) 0,8; 2) 1; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 1,5.

45. Построить углы, котангенсы которых равны: 1) 0,8; 2) 1,2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 2.

§ 2. Таблица тригонометрических функций

По таблицам натуральных тригонометрических величин найти числовые значения следующих функций:

46. 1) $\sin 20°$; 2) $\sin 30°$; 3) $\sin 43°$; 4) $\sin 77°$;
5) $\sin 15°18'$; 6) $\sin 25°42'$; 7) $\sin 35°19'$; 8) $\sin 35°23'$;
9) $\sin 59°34'$; 10) $\sin 17°46'$; 11) $\sin 45°21'$; 12) $\sin 30°33'$.

47. 1) $\operatorname{tg} 23°$; 2) $\operatorname{tg} 45°$; 3) $\operatorname{tg} 67°$; 4) $\operatorname{tg} 88°$;
5) $\operatorname{tg} 24°42'$; 6) $\operatorname{tg} 73°54'$; 7) $\operatorname{tg} 55°20'$; 8) $\operatorname{tg} 73°33'$;
9) $\operatorname{tg} 77°40'$; 10) $\operatorname{tg} 77°43'$; 11) $\operatorname{tg} 81°19'$; 12) $\operatorname{tg} 87°39'$.

48. 1) $\cos 10°$; 2) $\cos 60°$; 3) $\cos 59°$; 4) $\cos 77°$;
5) $\cos 34°18'$; 6) $\cos 19°42'$; 7) $\cos 55\ 36'$; 8) $\cos 55°37'$;
9) $\cos 35°32'$; 10) $\cos 49°35'$; 11) $\cos 77°15'$; 12) $\cos 81°45'$.

49. 1) $\operatorname{ctg} 16°$; 2) $\operatorname{ctg} 45°$; 3) $\operatorname{ctg} 45°12'$; 4) $\operatorname{ctg} 58°42'$;
5) $\operatorname{ctg} 60°14'$; 6) $\operatorname{ctg} 30°46'$; 7) $\operatorname{ctg} 75°27'$; 8) $\operatorname{ctg} 15°27'$;
9) $\operatorname{ctg}\ 8°40'$; 10) $\operatorname{ctg}\ 8°47'$; 11) $\operatorname{ctg}\ 0°38'$; 12) $\operatorname{ctg}\ 6°58'$.

Найти величину острых углов по данным значениям их функций:

50. 1) $\sin\alpha = 0{,}2588$; 2) $\sin\beta = 0{,}6211$; 3) $\sin\gamma = 0{,}8310$;
4) $\sin x = 0{,}8689$; 5) $\sin y = 0{,}0082$; 6) $\sin z = 0{,}3737$.

51. 1) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5317$; 2) $\operatorname{tg}\beta = 11{,}43$; 3) $\operatorname{tg}\gamma = 2{,}888$;
4) $\operatorname{tg} x = 0{,}5228$; 5) $\operatorname{tg} y = 5{,}105$; 6) $\operatorname{tg} z = 0{,}5000$;
7) $\operatorname{tg} u = 0{,}4200$; 8) $\operatorname{tg} v = 12{,}90$; 9) $\operatorname{tg} v = 6{,}630$.

52. 1) $\cos\alpha = 0{,}8480$; 2) $\cos\beta = 0{,}8712$; 3) $\cos\gamma = 0{,}1444$;
4) $\cos x = 0{,}3366$; 5) $\cos y = 0{,}9440$; 6) $\cos z = 0{,}5021$.

53. 1) $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}921$; 2) $\operatorname{ctg}\beta = 0{,}4040$; 3) $\operatorname{ctg}\gamma = 8{,}264$;
4) $\operatorname{ctg} x = 1{,}2059$; 5) $\operatorname{ctg} y = 2{,}210$; 6) $\operatorname{ctg} z = 14{,}66$.

54. Проследите по таблице, где быстрее всего изменяется величина синуса угла: около 0°, 90° или в средних значениях угла.

55. Что больше и во сколько раз: 1) $\sin 60°$ или $\operatorname{tg} 60°$? 2) $\cos 60°$ или $\operatorname{tg} 45°$?

56. Проверить по таблице:

1) $\sin 30 = \cos 60°$; 2) $\sin 40° = \cos 50°$;
3) $\cos 35° = \sin 55°$; 4) $\cos 80° = \sin 10°$;
5) $\operatorname{tg} 20° = \operatorname{ctg} 70°$; 6) $\operatorname{ctg} 25° = \operatorname{tg} 65°$;
7) $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45°$.

57. Вычислить:

1) $2\sin 30° + 6\cos 60° - 4\operatorname{tg} 45°$;
2) $4\sin 60° \cdot \cos 60° - \operatorname{tg} 60°$.

58. Заполнить таблицу:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$
25° 47° 60°				

Сравнить числовые значения $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

59. Пользуясь данными предыдущей таблицы (задача 58), вычислить $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ и сравнить полученные результаты.

60. Заполнить таблицу:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	$\sin 2\alpha$
10° 30° 45°				

Сравнить числовые значения $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ и $\sin 2\alpha$.

§ 3. Решение прямоугольных треугольников

Зависимость между сторонами и углами прямоугольного треугольника

Обозначения. В прямоугольном треугольнике ABC угол $A=\alpha$, угол $B=\beta$, угол $C=90°$, катет $BC=a$, катет $AC=b$ и гипотенуза $AB=c$.

61. В прямоугольном треугольнике ABC вычислить:

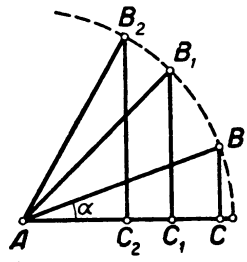
1) катет a по гипотенузе $c=30{,}6$ *см* и $\sin\alpha=\frac{2}{3}$;

2) гипотенузу c по катету $a=51$ *см* и $\sin\alpha=0{,}75$.

62. В прямоугольном треугольнике ABC вычислить катет a, если: 1) $b=14$ *м* и $\operatorname{tg}\alpha=0{,}14$; 2) $b=20{,}4$ *дм* и $\operatorname{ctg}\beta=1{,}5$.

63. Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Найти катеты a и b. Полагая $c=100$ единицам длины, заполнить таблицу:

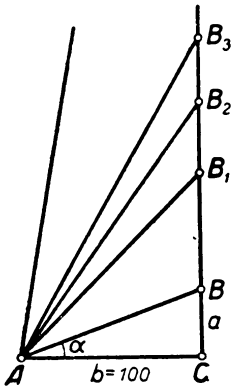
c	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$a=c\sin\alpha$	$b=c\cos\alpha$
100	20°				
100	45°				
100	60°				
100	80°				
100	90°				



Черт. 7.

Как изменяются с увеличением угла α от 0° до 90° $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$? Записать границы области изменения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в виде двойных неравенств (черт. 7). Если угол α увеличивается втрое, то увеличивается ли $\sin\alpha$ также втрое? Пропорциональны ли α и $\sin\alpha$?

64. Дан прямоугольный треугольник, катет которого равен b, а прилежащий к нему острый угол равен α. Найти катет a. Полагая $b = 100$ единицам длины, заполнить таблицу:



Черт. 8.

b	α	$\operatorname{tg}\alpha$	$a = b \operatorname{tg}\alpha$
100	20°		
100	45°		
100	60°		
100	80°		
100	→90°		

Пропорциональны ли α и $\operatorname{tg}\alpha$ (черт. 8)?

Решение прямоугольных треугольников

65. Решить прямоугольный треугольник, зная его катет и острый угол: 1) $a = 12$; $\alpha = 37°$; 2) $b = 10{,}5$; $\alpha = 50°20'$.

66. Начертить прямоугольный треугольник. Измерить один из его катетов и противолежащий ему острый угол. Вычислить другой катет и гипотенузу; результат вычислений проверить непосредственным измерением.

67. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высота $BD = 10{,}5$ *м*, а угол $B = 45°$. Определить основание AC треугольника.

68. В угол, равный 50°, надо вписать окружность радиуса 2,5 *см*. На каком расстоянии от вершины угла должен находиться центр окружности?

69. В равнобедренной трапеции основания равны 18,6 *см* и 30,8 *см*. Определить высоту трапеции, если один из углов её равен 126°40′.

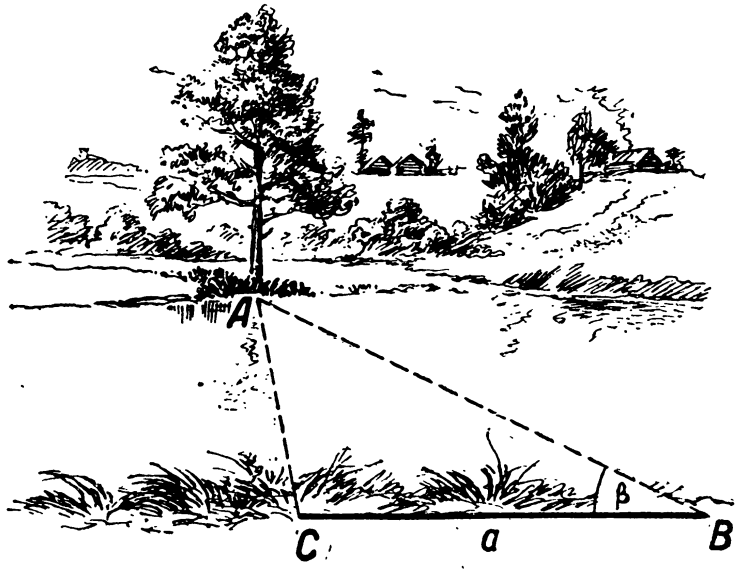
70. Найти периметр прямоугольного треугольника, если один катет его равен 8 *см*, а противолежащий ему угол содержит 43°.

71. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10,12 *дм*, а прилежащий угол содержит 57°24′. Определить радиус описанной окружности.

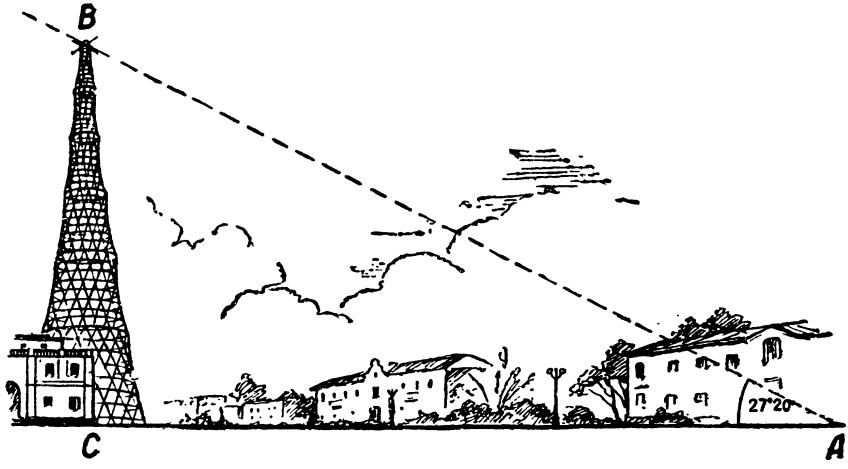
72. Катет прямоугольного треугольника равен 1,05 *м*, а противолежащий ему угол 25°10′. Определить медиану гипотенузы.

73. Чтобы определить ширину реки, проводят на одном берегу её, непосредственно у воды, базис BC, равный a метрам; из конца C базиса по перпендикулярному к нему направ-

лению, на противоположном берегу у самой воды, видно дерево A; из другого же конца B базиса это дерево видно под углом β к нему (черт. 9). Вычислить ширину реки, если $a = 100$ *м* и $\beta = 43°30'$.



Черт. 9.



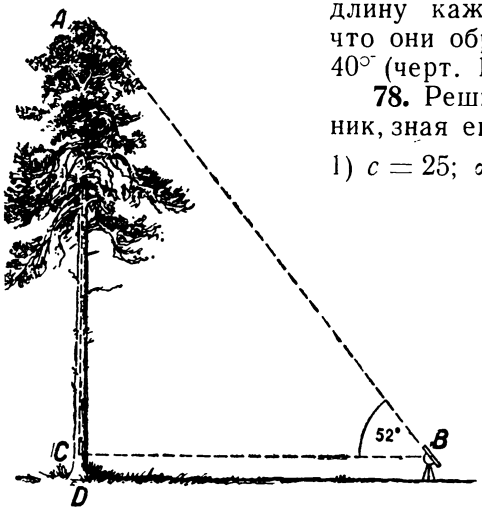
Черт. 10.

74. Телеграфный столб высотой в 10 *м* находится на берегу реки и виден с другого берега под углом, равным 5°. Определить ширину реки.

75. Вершина мачты видна с расстояния 210 *м* от её основания под углом 27°20′. Определить высоту мачты (черт. 10).

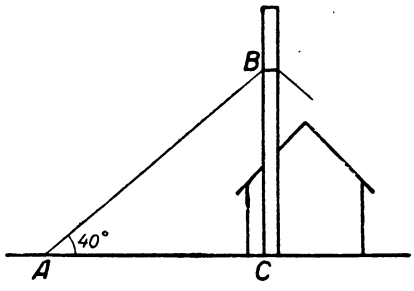
76. Определить высоту дерева AD, если вершина его A видна из точки B под углом в 52° к горизонтальной плоскости; высота угломерного прибора равна 1,2 *м*, и удалён он от дерева на расстояние $BC = 15$ *м* (черт. 11).

77. Фабричная железная труба, высота которой равна 16 *м*, поддерживается стальными тросами, прикреплёнными к трубе на расстоянии $\frac{3}{4}$ её высоты, считая от земли. Определить длину каждого из этих тросов, зная, что они образуют с горизонтом угол в 40° (черт. 12).



Черт. 11.

78. Решить прямоугольный треугольник, зная его гипотенузу и острый угол: 1) $c = 25$; $\alpha = 52°$; 2) $c = 0{,}185$; $\beta = 12°40'$.



Черт. 12.

79. С помощью чертёжного треугольника и транспортира построить прямоугольный треугольник с углом в 40° и гипотенузой, равной 12 *см*. Вычислить катеты треугольника и результат вычислений проверить непосредственным измерением.

80. Найти меньшую диагональ ромба, если его сторона равна 50 *см*, а один из углов содержит 47°.

81. Хорда стягивает дугу в 48°30′. Определить её расстояние от центра, если радиус круга $R = 95{,}2$ *см*.

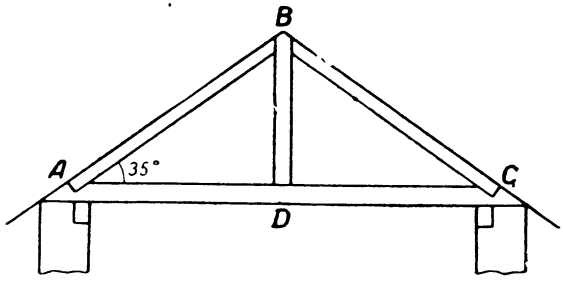
82. Найти периметр прямоугольника, если его диагональ, равная 100 *см*, образует с меньшей стороной угол, равный 70°.

83. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 0,125 *м*, острый угол треугольника 33°30′. Определить периметр треугольника.

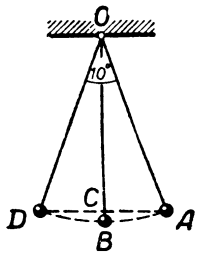
84. В прямоугольной трапеции большее основание равно 52 *см*, а острый угол равен 36°. Одна из диагоналей трапеции перпендикулярна к боковой стороне. Найти высоту и меньшее основание трапеции.

85. Автомобиль поднимается в гору по шоссе, составляющему с горизонтом угол, равный 3°. На какую высоту поднимается он, пройдя 0,8 *км* от начала подъёма?

86. Двускатная кровля наклонена к горизонтальной плоскости под углом в 35°. Длина её стропильной ноги AB (черт. 13) равна 2,8 *м*. Найти пролёт кровли AC и её высоту BD.



Черт. 13.



Черт. 14.

87. Амплитуда колебания маятника 10°. Каково наибольшее расстояние конца маятника от вертикали, проходящей через точку привеса, если длина маятника 0,4 *м* (черт. 14)?

88. Сила $R = 30{,}5$ *кГ* разложена на две взаимно перпендикулярные составляющие силы и образует с одной из них угол в 51°20′. Определить величину обеих составляющих сил.

89. Вагонетка с грузом весит 300 *кГ*. С какой силой надо тянуть её вверх по наклонной плоскости, если плоскость наклонена к горизонту под углом в 17°? С какой силой вагонетка будет давить на наклонную плоскость?

Указание. Разложить силу тяжести по двум направлениям: параллельному и перпендикулярному наклонной плоскости.

90. Плечи прямолинейного рычага имеют длину 5 *дм* и 15 *дм*. На сколько дециметров поднимается (по вертикали) каждый конец при повороте рычага на: 1) 40°; 2) 60°; 3) 90° от горизонтального положения?

---

91. Решить прямоугольный треугольник, зная его гипотенузу и катет: 1) $c = 40$; $a = 22$; 2) $c = 8{,}54$; $b = 6{,}32$.

92. Начертить прямоугольный треугольник. Измерить один из его катетов и гипотенузу. Вычислить острые углы треугольника и другой его катет; результат вычислений проверить непосредственным измерением.

93. Длина отрезка 5,5 *см*, длина его проекции на ось 3,3 *см*. Определить угол между отрезком и осью проекций.

94. Найти углы параллелограма, зная, что его меньшая сторона равна 18 *см*, а высота, опущенная на большую сторону, равна 12 *см*.

95. В равнобедренном треугольнике боковая сторона $a = 34{,}15$ *дм*, а основание $b = 45{,}16$ *дм*. Определить угол при основании треугольника.

96. В окружности радиуса 28,4 *см* проведена хорда длиной 40,7 *см*. Сколько градусов в меньшей из дуг, которые она стягивает?

97. Основание равнобедренного треугольника равно 0,28 *м*, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 0,21 *м*. Определить угол при основании треугольника.

98. Расстояние между центрами двух равных окружностей равно 83 *см*. Сколько градусов в дуге, стягиваемой их общей хордой, если радиус каждой окружности равен 58 *см*?

99. Под каким углом наклонена к земле лестница длиной 7,2 *м*, нижний конец которой отстоит от стены на расстоянии 1,8 *м*? На какой высоте находится её верхний конец?

100. Определить угол между двумя внешними общими касательными, проведёнными к двум внешне касающимся окружностям, радиусы которых равны 7 *см* и 5 *см*.

101. Из некоторой точки A окружности, радиус которой равен 5 *дм*, проведены две хорды длиной 7 *дм* и 8 *дм*. Вычислить угол, образуемый этими хордами. Рассмотреть два случая, когда хорды находятся: 1) по разные стороны радиуса AO и 2) по одну сторону того же радиуса.

---

102. Решить прямоугольный треугольник, зная его катеты: 1) $a = 49{,}2$; $b = 24{,}0$; 2) $a = 1{,}75$; $b = 2{,}55$.

103. При помощи чертёжного треугольника начертить прямоугольный треугольник с катетами в 6 *см* и 10 *см*. Вычислить острые углы треугольника и его гипотенузу; результат вычислений проверить непосредственным измерением.

104. Вертикальный шест длиной в 3 *м* отбрасывает тень, длина которой равна 5 *м*. Определить угловую высоту солнца (угол, составленный солнечными лучами с горизонтальной плоскостью).

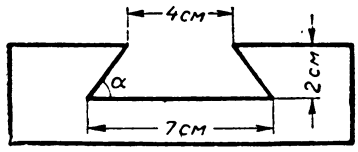
105. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина касательной равна 21 *см*. Определить угол между касательными, если радиус окружности равен 10 *см*.

106. Стороны прямоугольника имеют длину 25,4 *см* и 16,7 *см*. Найти угол между диагоналями.

107. Определить периметр ромба и его углы, если диагонали ромба равны 8,5 *см* и 5,8 *см*.

108. Основания равнобедренной трапеции 15 *см* и 24 *см*, высота 5,4 *см*. Определить углы и боковую сторону трапеции.

109. В планке (черт. 15) требуется сделать паз, размеры сечения которого указаны на чертеже. Вычислить углы наклона боковых граней паза, зная, что они равны между собой.



Черт. 15

---

110. В прямоугольном треугольнике ABC даны: острый угол $A = 34°26'$ и катет $a = 20{,}18$ *дм*.

Определить: 1) гипотенузу AB; 2) проекцию гипотенузы AB на каждый катет; 3) проекцию каждого катета на гипотенузу; 4) высоту треугольника, опущенную на гипотенузу.

111. Угол в 45°20′, вписанный в окружность, опирается на хорду, длина которой 0,248 *м*. Определить радиус окружности.

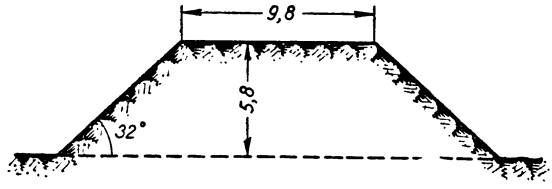
112. В равнобедренном треугольнике боковая сторона в 2,5 раза больше основания. Найти углы треугольника.

113. В параллелограме высоты, проведённые из вершины тупого угла, равного 161°15′, имеют длину 21,25 *дм* и 42,42 *дм*. Вычислить периметр параллелограма.

114. Катеты треугольника равны 12 *см* и 16 *см*. Из середины гипотенузы восставлен к ней перпендикуляр. Вычислить углы треугольника и длину этого перпендикуляра от середины гипотенузы до пересечения с одним катетом и с продолжением другого.

115. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при вершине β. Определить радиусы окружностей — описанной (R) и вписанной (r).

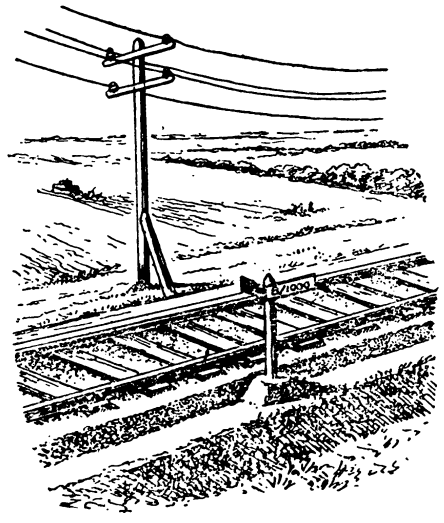
116. Железнодорожная насыпь высотой в 5,8 *м* должна иметь угол ската 32°. Ширина полотна (при двух путях) составляет 9,8 *м*. Найти ширину насыпи у её основания (черт. 16).



Черт. 16.

117. Найти уклон дороги, поднимающейся под углом 4° к горизонту.

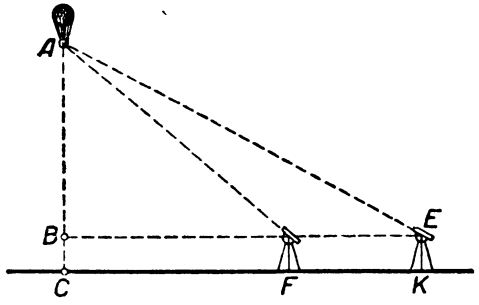
Указание. Уклон (или подъём) дороги измеряется отношением $h:1000$, где h есть выраженная в метрах высота подъёма на протяжении 1 *км* горизонтального пути. Так, надпись 8/1000 на дощечке (черт. 17) указывает, что на протяжении 1 *км* железнодорожный путь поднимается в гору на 8 *м*.



Черт. 17.

118. На какую высоту поднялся воздушный шар, если он виден из пункта F под углом 40°40′, а из пункта K под углом 22°20′. Расстояние между пунктами F и K равно 90 *м*. Высота угломерного прибора равна 1,5 *м* (черт. 18).

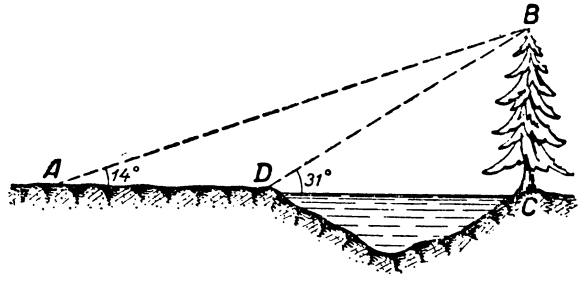
119. С пункта, возвышающегося над уровнем озера на 10 *м*, виден самолёт на 60° выше горизонта, а его отражение в воде на 62°30′ ниже горизонта. На какой высоте над уровнем воды находится самолёт?



Черт. 18.

120. Чтобы определить ширину реки *DC* (черт. 19), на берегу реки в направлении *CD* провешили расстояние $DA = 36$ *м*. Из пункта *A* верхушка *B* дерева, расположенного в точке *C* на противоположном берегу реки, видна под углом 14°, а из пункта *D* — под углом 31°. Определить ширину реки *DC* и высоту дерева *CB*.

121. Наблюдатель, находясь на морском берегу высотой в 50 *м* над уровнем моря, смотря на юг, видит две лодки,



Черт. 19.

причём луч зрения составляет с горизонтом для одной лодки 32°, а для другой 17°. Чему равно расстояние между лодками?

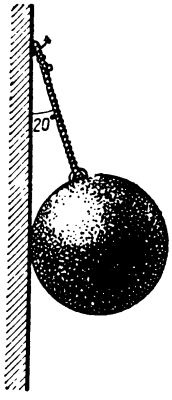
122. Вычислить работу на пути 25 *м*, если сила, равная 10 *кГ*, действует на данный предмет под углом 40° к направлению движения.

123. Какую силу нужно приложить, чтобы на пути 100 *м* работа этой силы была равна 140 *кГм*, если сила образует угол 31° с направлением движения?

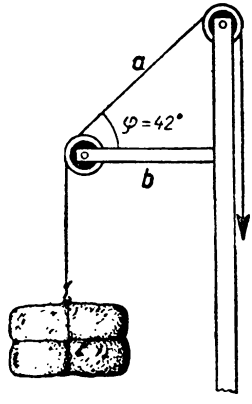
124. Под каким углом к направлению движения надо приложить силу, равную 2 *кГ*, чтобы на пути 13 *м* работа данной силы была равна 20 *кГм*?

125. Шар весом $P = 3$ *кГ* висит на верёвке у стены (черт. 20). Определить силы натяжения верёвки и давления шара на стену.

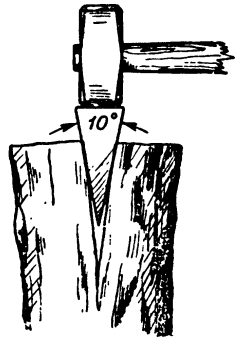
126. Груз весом $P = 160$ *кГ* поднимают при помощи двух неподвижных блоков (черт. 21). 1) Определить силу растяжения троса *a* и сжатия балки *b*. 2) Как величина этих сил зависит от угла φ?



Черт. 20.



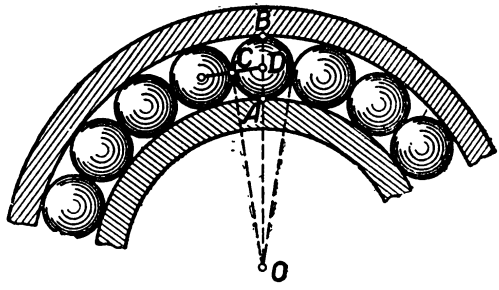
Черт. 21.



Черт. 22.

127. На обух клина произведён удар с силой $F = 180$ *кГ* (черт. 22). 1) Определить силу, с которой каждая щека клина действует на полено. 2) Как зависит величина этой силы от величины острого угла φ при вершине клина?

128. Двадцать стальных шариков диаметром по 16 *мм* находятся в шариковом подшипнике (черт. 23). Определить диаметр внутреннего и наружного круга катания (радиусы катания—*OA* и *OB*). Для упрощения задачи предположить, что шарики лежат вплотную друг к другу.



Черт. 23.

Практические работы

129. Определить высоту предмета, к основанию которого можно подойти.

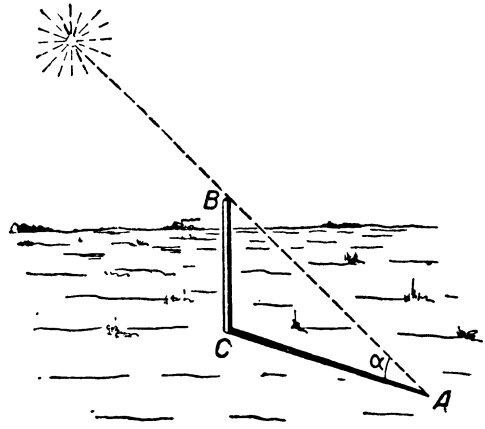
130. Определить ширину реки или оврага.

131. Определить высоту дерева, находящегося на противоположном берегу реки или оврага.

132. В солнечный день в полдень определить угловую высоту солнца, для чего измерить высоту вертикально стоящего шеста *BC* и длину отбрасываемой им тени *CA* (черт 24). Измеряйте угловую высоту солнца еженедельно в полдень в течение

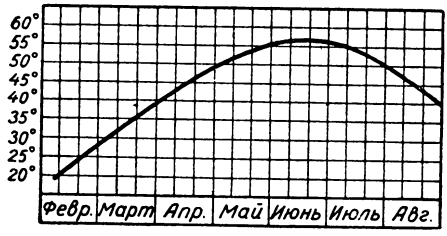
года, результаты измерений записывайте в таблице и постройте график угловой высоты солнца на основании средних данных по месяцам.

Приведём пример (черт. 25).



Черт. 24.

График угловой высоты солнца для г. Сердобска
(с 5/II по 31/VIII 1949 г.)



Черт. 25.

Дата	Высота шеста в *м*	Длина тени в *м*	Угловая высота солнца
	1) Февраль		
5	1	2,88	19°10′
10	1	2,67	20°30′
15	1	2,48	22°00′
20	1	2,31	23°20′
25	1	2,09	25°30′
	2) Март		
4	1	1,90	27°50′
10	1	1,68	30°50′
15	1	1,52	33°20′

§ 4. Задачи для повторения курса VIII класса*

Метрические соотношения в треугольнике

133. Построить отрезок, равный:

1) $a \sin \alpha$; 2) $a \cos \alpha$; 3) $\frac{a}{\cos \alpha}$;

4) $a \cos \alpha - b$; 5) $\sqrt{ab \cos \alpha}$,

где a и b — данные отрезки и α — данный угол.

* Решать при изучении дальнейших отделов программы геометрии в течение всего учебного года.

134. Заполнить таблицу

a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{tg}\beta$
3	4							
12	16							
0,6		1						
	5	13						

где a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза; α и β — острые углы, противолежащие катетам a и b.

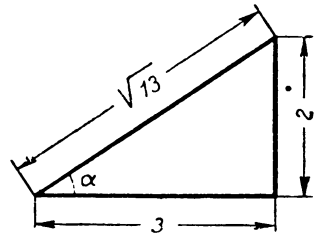
135. Тангенс одного из острых углов прямоугольного треугольника равен $\frac{8}{15}$, меньший катет равен 24 *см*. Найти гипотенузу.

136. Найти сумму квадратов косинусов острых углов прямоугольного треугольника.

137. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен половине гипотенузы. Определить острые углы треугольника и значения тригонометрических функций этих углов.

138. В прямоугольном треугольнике катеты равны. Определить острые углы треугольника и значения тригонометрических функций этих углов.

139. Найти $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, для чего по данному тангенсу построить прямоугольный треугольник с углом α (черт. 26).



Черт. 26.

140. Дано: $\sin\beta = \frac{3}{5}$. Найти все тригонометрические функции угла β.

141. В треугольнике ABC определить сторону BC, если $AB = 15$ *см*, $AC = 10$ *см* и угол $A = 154°$.

142. Стороны параллелограма равны 2 *см* и 8 *см*, а один угол параллелограма равен 20°. Найти диагонали параллелограма.

143. Даны две силы: $P = 4{,}3$ *кГ* и $Q = 5{,}6$ *кГ*, направленные перпендикулярно друг к другу Какой угол образует равнодействующая с силой P и чему она равна?

Пропорциональные линии в круге

144. Диаметр AB, перпендикулярный хорде CD, делится ею на две части, равные 20 *дм* и 5 *дм*. Найти величину дуги, стягиваемой хордой.

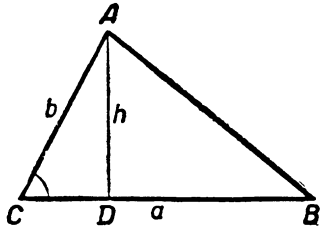
145. AB — диаметр, BC — касательная; отрезок AC делится окружностью на две части: $AK = 5$ *см* и $KC = 4$ *см*. Найти угол CAB.

146. AB — диаметр, касательная $BC = 5{,}3$ *см*, а угол $BAC = 32°$. Найти отрезки AD и DC, на которые секущая AC делится окружностью.

Площади многоугольников

В нижеследующих задачах исследовать решения в зависимости от изменения углового параметра.

147. Основание треугольника равно a, одна из боковых сторон — b, угол между ними C. Найти площадь треугольника, если угол C — острый (черт. 27).



Черт. 27.

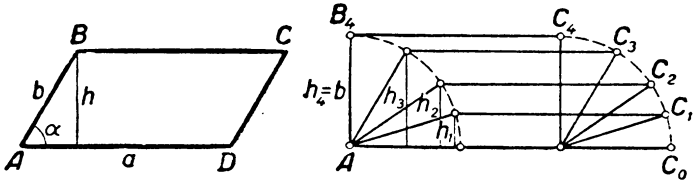
Решение. Пусть $AD = h$; $h = b \sin C$;

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Исследование. Пусть a и b постоянны. Допустимые по условию значения угла C: $0° < C < 90°$. Если угол C увеличивается от 0° до 90°, то высота возрастает от 0 до b. Вместе с этим возрастает и площадь треугольника от 0 до $\frac{1}{2} ab$ (проверить по формуле и на чертеже).

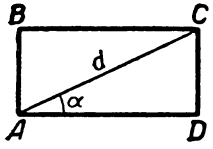
148. Стороны параллелограма равны a и b. Острый угол α. Найти площадь параллелограма (черт. 28).



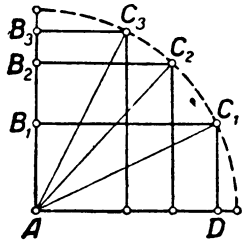
Черт. 28.

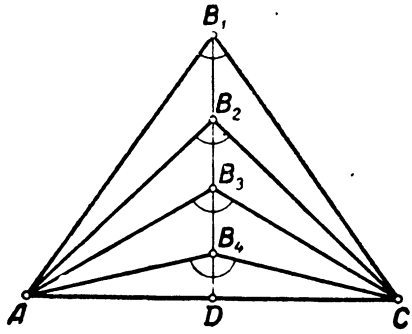
149. Найти площадь S прямоугольника, диагональ которого d образует с основанием его угол α (черт 29).

150. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α, основание равно a. Найти боковую сторону b и площадь S (черт. 30).



Черт. 29.



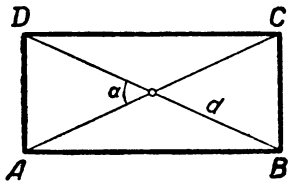


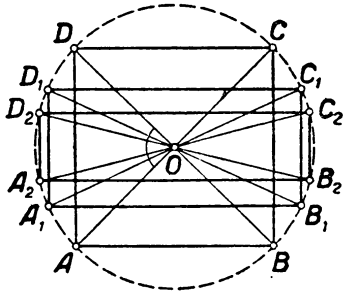
Черт. 30.

151. Острый угол параллелограма равен α. Расстояния точки O пересечения диагоналей до сторон равны a и b. Найти площадь S параллелограма.

152. Около круга радиуса r описан ромб с острым углом α. Найти площадь S ромба.

153. Бóльшая диагональ ромба равна d. Острый угол α. Найти сторону ромба a и площадь ромба S.





Черт. 31.

154. В прямоугольнике диагональ равна d. Острый угол между диагоналями равен α. Найти площадь S прямоугольника (черт. 31).

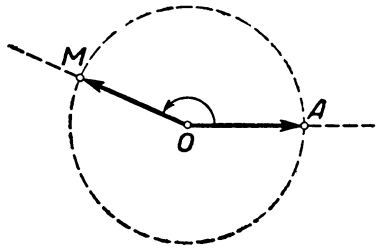
ГЛАВА II

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО АРГУМЕНТА

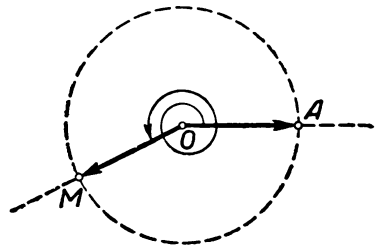
§ 5. Обобщение понятий угла и дуги

155. На какой угол поворачивается минутная стрелка за 5 минут? за 20 минут? за 1 час? за 2 часа 10 мин.?

156. На какой угол надо повернуть минутную стрелку, чтобы перевести часы назад на 10 минут? на 1 час 12 мин.? на 2 часа 40 мин.?



Черт. 32.



Черт. 33.

157. Часы отстали на 18 минут. На какой угол надо повернуть минутную стрелку, чтобы часы показывали верное время?

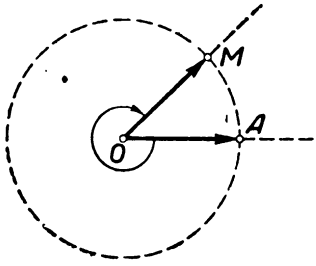
158. Ведро в колодце поднимается на 2 *м*, если рукоятка ворота повёрнута на пять полных оборотов по часовой стрелке. На какой угол надо повернуть рукоятку ворота, чтобы ведро: 1) поднялось на 1,5 *м*? 2) опустилось на 1,25 *м*?

159. Два зацепляющихся зубчатых колеса имеют 24 зубца и 30 зубцов. Меньшее колесо («ведущее») приводит во вращательное движение большее («ведомое»). На какой угол должно повернуться ведущее колесо, чтобы ведомое повернулось на 2 оборота против часовой стрелки?

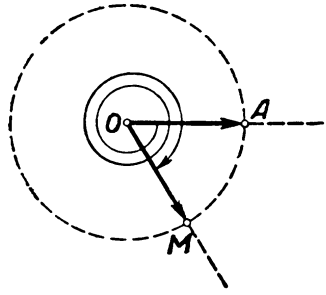
160. Отметить на тригонометрическом круге положение конечного радиуса угла, равного: $45°$; $-30°$; $210°$; $-135°$; $-810°$; $450°$; $60° + 360°k (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$.

161. Найти при помощи транспортира градусную меру угла AOM, изображённого на чертежах 32—35.

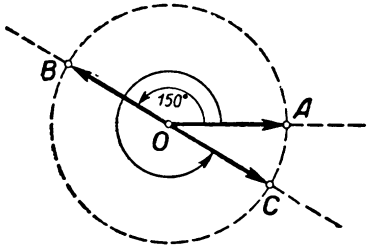
162. Записать общий вид углов (дуг) для случаев, когда конечный радиус их занимает положение: 1) OB; 2) OC, и найти несколько частных значений этих углов (дуг) (черт. 36).



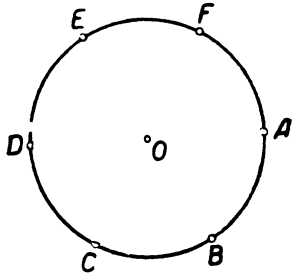
Черт. 34.



Черт. 35.



Черт. 36.



Черт. 37.

163. По данному общему виду угла x написать его частные положительные значения, меньшие 360°:

1) $x = 15° + 120°\ k$; 2) $x = -30° + 180°\ k$;

3) $x = -45° + 60°\ k$; 4) $x = \pm 120° + 360°\ k$.

164. Окружность разделена на шесть равных частей (черт. 37). Выразить в градусах сумму дуг:

$$\smile AECBF + \smile EAB + \smile DCB.$$

§ 6. Измерение дуг и углов

165. Какие величины принимаются за единицу при градусном и радианном измерениях углов (дуг)? Какая существует связь между этими единицами?

166. В чём разница между градусным и радианным измерениями углов (дуг)?

167. Почему ошибочна запись $\pi = 180°$?

168. Найти радианную меру углов: 1) равностороннего треугольника; 2) равнобедренного прямоугольного треугольника; 3) правильного шестиугольника и 4) правильного двенадцатиугольника.

169. В равнобедренном треугольнике угол при вершине в 2,5 раза меньше угла при основании. Выразить углы треугольника в градусной и радианной мере. Проверить полученный ответ.

170. Найти радианную меру угла, равного: 1) 1°; 2) 5°; 3) 30°; 4) — 135°; 5) 225°; 6) — 162°.

Найти градусную меру угла, радианная мера которого равна (задачи 171—172):

171. 1) π; 2) $0{,}5\pi$; 3) $-0{,}75\pi$; 4) $\frac{\pi}{3}$;
5) $0{,}1\pi$; 6) $-\frac{2\pi}{15}$; 7) $\frac{5\pi}{6}$; 8) $-\frac{7\pi}{12}$.

172. 1) 1; 2) 2; 3) — 3; 4) 2,5;
5) 0,1; 6) 0,01; 7) — 2,1; 8) — 0,55.

173. Окружность морских компасов делится на 32 равные части, называемые румбами. Выразить румб: 1) в градусах и минутах; 2) в радианах.

174. Пользуясь таблицей для перевода радианной меры угла (дуги) в градусную, определить градусную меру углов (дуг). 0,54 рад.; 3,83 рад.; 2,106 рад.; 3,512 рад.; 12,378 рад.

175. Пользуясь таблицей для перевода градусной меры угла (дуги) в радианную, найти радианную меру углов (дуг): 1°; 5°; 30°; 45°; 60°; 36°; 108°; 135°; 216°42′; 128°13′; 289°26′.

176. Определить длину дуги окружности радиуса $R = 25$ *см*, если: 1) радианная мера дуги равна 1,25; 2) градусная мера дуги равна 144°.

177. Радиус окружности равен 36 *см*. Найти периметр сектора, дуга которого содержит $\frac{7}{9}$ радиана.

178. Найти радианную меру угла сектора, длина дуги которого: 1) втрое меньше периметра сектора; 2) составляет половину периметра сектора.

179. Шкив сверхскоростного электромотора делает 120 000 оборотов в минуту. Определить угловую скорость вращения этого шкива в градусах в секунду и в радианах в секунду.

180. Для измерения углов артиллеристы употребляют особую единицу, называемую «тысячной» или «делением угломера». Полный угол содержит 6000 тысячных. 1) Выразить одну тысячную в минутах. 2) Выразить в тысячных углы, содержащие 36′; 3°; 6°; 12°; 36°; 48°.

181. Длина дуги равна L, а центральный угол, соответствующий ей, содержит n тысячных. Определить радиус дуги, приняв $\pi \approx 3$.

182. Телеграфный столб, высота которого 8 *м*, виден под углом в 10 тысячных. Найти расстояние от наблюдателя до этого столба.

183. Для измерения географической долготы места употребляют особую единицу, называемую часом.

Час долготы равен $\frac{1}{24}$ части полного угла (360°), на который поворачивается Земля за сутки Один час содержит 60 минут, а каждая минута содержит 60 секунд. Выразить час минуту и секунду долготы в градусах, минутах и секундах дуги.

184. Географическая долгота Москвы (от Гринвича) равна 37°34′15″. Выразить её в часах, минутах и секундах.

185. Географическая долгота Владивостока (от Гринвича) равна 8 час. 47,5 мин. Выразить долготу Владивостока в градусах, минутах и секундах.

§ 7. Тригонометрические функции

Определения тригонометрических функций

186. Доказать, что синус данного угла α зависит только от величины угла α.

187. (Устно.) Может ли синус угла принимать значения, по абсолютной величине бóльшие единицы? Почему?

188. (Устно.) При каком положении конечного радиуса угла косинус этого угла принимает положительные значения? отрицательные значения?

189. Доказать, что косинус данного угла α определяется исключительно величиной угла α.

190. (Устно.) Может ли функция $\cos x$ иметь значение по абсолютной величине, большее единицы? Почему?

191. (Устно.) В каких четвертях $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки?

192. Доказать неравенство

$$\sin\alpha+\cos\alpha>1, \text{ если } 0°<\alpha<90°.$$

193. (Устно.) Может ли значение $\operatorname{tg}\alpha$ по абсолютной величине быть меньше, чем значение $\sin\alpha$? Почему?

194. (Устно.) Чем отличаются друг от друга области определения функций $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$?

195. Может ли значение $\operatorname{ctg}\alpha$ по абсолютной величине быть меньше, чем значение $\cos\alpha$? Почему?

196. В каких четвертях $\sin x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют одинаковые знаки?

197. В каких четвертях знаки у тангенса и котангенса одного и того же угла различны?

198. Дано: α — положительный острый угол. Какое из чисел больше: 1) $2\sin\alpha$ или $\sin^2\alpha$? 2) $2\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{tg}^2\alpha$?

Изменение тригонометрических функций

199. Проследить за изменением $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ с изменением аргумента от 0° до 360° и заполнить следующую таблицу (стрелки ↖ и ↘ заменяют в таблице слова «возрастает» и «убывает»):

x	$0°$ (0)	I четв.	$90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	II четв.	$180°$ (π)	III четв.	$270°$ $\left(\frac{3}{2}\pi\right)$	IV четв.	$360°$ (2π)
$\sin x$	0	↖							
$\cos x$	1	↘							
$\operatorname{tg} x$	0	↖							
$\operatorname{ctg} x$	не существует	↘							

Что можно сказать о дальнейшем изменении тригонометрических функций, когда аргумент принимает значения, бо́льшие 360°, и об их изменении при отрицательных значениях аргумента?

200. Какие области значений имеют функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$?

201. В каких границах может изменяться каждая из следующих функций: 1) $1 + \sin x$? 2) $1 - \cos x$?

202. При каких значениях x на отрезке от 0 до 2π функция $\sin x$: 1) возрастает? 2) убывает? 3) положительна? 4) отрицательна? 5) обращается в нуль?

203. При каких значениях x на отрезке от 0 до 2π функция $\cos x$: 1) возрастает? 2) убывает? 3) положительна? 4) отрицательна? 5) обращается в нуль?

204. При каких значениях x на отрезке от 0 до π функция $\operatorname{tg} x$: 1) возрастает? 2) убывает? 3) положительна? 4) отрицательна? 5) принимает значение, равное 0? 6) не существует?

205. Ответить на аналогичные вопросы (задача 204) относительно функции $\operatorname{ctg} x$.

206. В каких четвертях $\sin x$ и $\cos x$ одновременно убывают?

207. Определить, при каких значениях x на отрезке от 0 до 2π функция $y = \sin x - \cos x$: 1) обращается в нуль? 2) принимает положительные значения? 3) принимает отрицательные значения?

Ответить на аналогичные вопросы относительно функций:

$$y = \sin x + \cos x \text{ и } y = \sin x \cdot \cos x.$$

208. Найти область значений функций:

$$1)\ y=|\cos x|;\quad 2)\ y=\sin|x|.$$

209. Какие тригонометрические функции могут иметь значение, равное: 1) $\frac{1}{2}$? 2) $-0{,}85$? 3) 1? 4) -1? 5) 1,2? 6) $-2{,}35$? 7) $\sqrt{2}$? 8) $\sqrt{0{,}5}$? 9) π? 10) $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$, $a>0, b>0$? 11) $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$, $a>0$, $b>0$? 12) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$? 13) $k+\frac{1}{k}$?

210. Если угол принадлежит треугольнику, то какие тригонометрические функции этого угла могут принимать отрицательные значения и когда именно?

211. Могут ли тригонометрические функции половины угла треугольника быть отрицательными?

212. Определить знак каждой из данных разностей:

1) $\sin 123^\circ - \sin 132^\circ$;
2) $\cos 35^\circ - \cos 40^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 220^\circ - \operatorname{tg} 217^\circ$;
4) $\operatorname{ctg} 304^\circ - \operatorname{ctg} 316^\circ$;
5) $\sin 58^\circ - \cos 58^\circ$;
6) $\operatorname{ctg} 100^\circ - \operatorname{tg} 100^\circ$;
7) $\sin 81^\circ - \operatorname{tg} 81^\circ$;
8) $\operatorname{ctg} 125^\circ - \cos 125^\circ$;
9) $\operatorname{cosec} 216^\circ - \operatorname{ctg} 216^\circ$;
10) $\operatorname{tg} 324^\circ - \sec 324^\circ$.

213. Определить знак каждого из данных произведений:
1) $\sin 100^\circ \cdot \sin 132^\circ$; 2) $\cos 210^\circ \cdot \sin 115^\circ$; 3) $\cos 285^\circ \cdot \cos 316^\circ$;
4) $\operatorname{tg} 112^\circ \cdot \sin 165^\circ$; 5) $\cos 318^\circ \cdot \operatorname{tg} 214^\circ$; 6) $\operatorname{ctg} 300^\circ \cdot \sin 222^\circ$;
7) $\sin 118^\circ \cdot \cos 118^\circ \cdot \operatorname{tg} 118^\circ$; 8) $\sec 311^\circ \cdot \operatorname{ctg} 311^\circ \cdot \cos 311^\circ$;
9) $\operatorname{ctg} 276^\circ \cdot \sec 276^\circ \cdot \operatorname{cosec} 276^\circ$; 10) $\cos 123^\circ \cdot \operatorname{tg} 231^\circ \cdot \sin 312^\circ$.

214. Какие значения на отрезке от 0° до 360° можно давать α, чтобы выполнялись соотношения:

1) $\sin 200^\circ > \sin\alpha$;
2) $\cos 150^\circ > \cos\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg} 225^\circ$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha$;
5) $\operatorname{cosec} 30^\circ > \operatorname{cosec}\alpha$?

215. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y=2\sin x+3$;
2) $y=1-4\cos x$;
3) $y=0{,}25+2\cos^2 x$;
4) $y=10-9\sin^2 x$.

216. При каких значениях x нижеследующие функции принимают наименьшее значение:

$$1)\ \frac{1}{1+\sin x};\quad 2)\ \frac{1}{1-\cos x}.$$

Найти это наименьшее значение функции.

217. (Устно.) Как принято понимать записи:

$$\sin 1?\ \cos(-3)?\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}?\ \operatorname{ctg} 0{,}2?$$

218. Положительным или отрицательным числом являются следующие значения тригонометрических функций:

1) $\cos 2$? 2) $\sin 3$? 3) $\operatorname{tg} 10$? 4) $\operatorname{ctg} 1{,}7$?

219. (Устно.) Что больше:

1) $\sin 1$ или $\sin 10°$? 2) $\cos 1$ или $\cos 1°$? 3) $\operatorname{ctg} 0{,}1$ или 1?

220. (Устно.) Что больше:

1) $\sin 1$ или $\operatorname{tg}(\cos 0)$? 2) $\cos 1$ или $\operatorname{ctg}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$?

221. α — радианная мера дуги $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Какое из чисел является бóльшим:

1) $\sin \alpha$ или α? 2) $\operatorname{tg} \alpha$ или α?

222. Пользуясь таблицей натуральных значений тригонометрических функций, найти: 1) $\sin 0{,}2$; 2) $\cos \frac{3}{4}$; 3) $\operatorname{tg} 1{,}48$.

223. Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций, найти:

1) $\sin\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\cos \pi)$; 2) $\operatorname{tg}(\cos 0) + \cos(\operatorname{tg} 0)$.

224. Найти (с точностью до 0,01) значение функции $x - \sin x$ при:

1) $x = 0{,}1$; 2) $x = 0{,}2$; 3) $x = 0{,}3$;
4) $x = 0{,}4$; 5) $x = 0{,}5$; 6) $x = 0{,}6$;
7) $x = 0{,}7$; 8) $x = 0{,}8$; 9) $x = 0{,}9$;
10) $x = 1$.

225. При каких значениях x функция $\sin(\sin x)$ принимает наибольшее и наименьшее значения? Пользуясь таблицей натуральных значений тригонометрических функций, найти эти значения функции.

226. Ответить на аналогичные вопросы (задача 225) относительно функции $1 - \cos(\sin x)$.

Значения тригонометрических функций некоторых углов

227. Пользуясь определениями тригонометрических функций, заполнить следующую таблицу:

α	$0°$ (0)	$30°$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45°$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60°$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$120°$ $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$135°$ $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$150°$ $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	$180°$ (π)
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\operatorname{tg}\alpha$									

α	$180°$ (π)	$210°$ $\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	$225°$ $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$240°$ $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	$270°$ $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$300°$ $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$	$315°$ $\left(\frac{7\pi}{4}\right)$	$330°$ $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$360°$ (2π)
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\operatorname{tg}\alpha$									

228. (Устно.) Упростить выражения:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90° + 4\operatorname{tg} 180°$;
2) $5\sin 270° - 2\cos 0° + 3\operatorname{ctg} 90°$;
3) $a\sin\pi + b\cos\pi + c\operatorname{tg}\pi$;
4) $m\cos 90° - n\cos 180° + p\sin 270° + q\operatorname{tg} 360°$;
5) $2\operatorname{tg} 0° + 8\cos 270° - 6\sin 90°$.

229. Найти числовое значение следующих выражений:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha$ при а) $\alpha = 0°$; б) $\alpha = 90°$; в) $\alpha = 180°$; г) $\alpha = 270°$;

2) $\sin(\alpha + 45°) + 2\sin(\alpha - 45°) + 4\cos 2\alpha + 2\cos(\alpha + 135°)$ при а) $\alpha = 45°$; б) $\alpha = 135°$.

230. Доказать, что при радиусе $R = 1$ всякая хорда окружности равна удвоенному синусу половины центрального угла, соответствующего хорде.

231. Пользуясь утверждением предыдущей задачи, найти значения тригонометрических функций углов $30°$, $45°$, $60°$.

232. Зная, что сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, определить $\sin 18°$.

Найти числовые значения выражений (задачи 233—235):

233. 1) $\operatorname{tg}^2 45° \cdot \sin 60° \cdot \operatorname{tg}^2 60°$;

2) $\operatorname{tg}^2 30° + 2 \sin 60° + \operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 60° + \cos^2 30°$.

234. $\operatorname{ctg}^2 45° + \cos 60° - \sin^2 60° + \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 60°$.

235. $\cos 60° - \operatorname{tg}^2 45° + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 30° + \cos^2 30° - \sin 30°$.

236. Доказать неравенства:

1) $\sin 30° + \cos 45° > 1$; 2) $\sin 30° + \sin 60° > 1$.

237. Найти числовое значение выражения $\sin \alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$ при: 1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 45°$; 3) $\alpha = 60°$.

Упростить следующие выражения (задачи 238—242):

238. (Устно.) $a \sin 0° + b \cos 90° + c \operatorname{tg} 180°$.

239. (Устно.) $a^2 \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \sec \pi - b^2 \sin \frac{3\pi}{2}$.

240. $m^2 \operatorname{tg} 225° - 4mn \sin 210° + 3n^2 \operatorname{tg}^2 30°$.

241. $a^3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + a^2 b \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{3} + 9ab^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} + 2b^3 \cos \frac{5\pi}{3}$.

242. $2\cos^2 315° + 3p \operatorname{ctg} 135° + p^2 \operatorname{tg}^2 300° - 2p^3 \sin^2 225°$.

243. Проверить равенство:

$$\cos 30° \cdot \operatorname{tg} 60° - 1 = \operatorname{ctg}^2 60° \cdot (1 + \sin^2 315°).$$

244. При каких значениях x на отрезке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ разность $\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x$: 1) положительна? 2) отрицательна? 3) равна нулю?

245. При каких значениях x на отрезке от 0 до π разность $\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}$: 1) положительна? 2) отрицательна? 3) равна нулю?

246. При каких значениях x в промежутке от $\frac{\pi}{2}$ до π сумма $\sqrt{3} + \operatorname{tg} x$: 1) положительна? 2) отрицательна? 3) равна нулю?

247. При каких значениях x на отрезке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ выражение $\sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}$ имеет действительные значения?

248. Определить знак разности:

1) $\cos\left(3 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg} 1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}\right)$.

249. Найти (по таблице):

1) $\sin\left(\cos \frac{5\pi}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\operatorname{cosec} \frac{7\pi}{6}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\sin^2 \frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $\sin\left(1{,}2 \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{3}\right)$.

Построение и нахождение угла по данному значению тригонометрической функции

250. Построить угол x, зная, что синус этого угла равен:

1) $\frac{1}{2}$ и $90° < x < 180°$;

2) 0,4 и $0° < x < 180°$;

3) $-\frac{3}{4}$ и $180° < x < 270°$.

251. Построить угол x, зная, что его косинус равен:

1) $\frac{1}{3}$ и $270° < x < 360°$; 2) $-0{,}6$ и $90° < x < 180°$;

3) $-\frac{2}{3}$ и $180° < x < 270°$; 4) $\frac{1}{2}$ и $0° < x < 360°$.

252. Построить угол x, зная, что его тангенс равен:

1) 1,5 и $0° < x < 180°$; 2) -2 и $90° < x < 180°$;

3) $-\frac{2}{3}$ и $270° < x < 360°$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $180° < x < 270°$.

253. Построить угол x, зная, что его котангенс равен:

1) -1 и $90° < x < 180°$; 2) $-\sqrt{3}$ и $270° < x < 360°$;

3) 2 и $0° < x < 360°$; 4) $\frac{2}{3}$ и $\sin x < 0$.

254. Построить положительный угол x, меньший, чем 360°, если:

1) $\sin x = -\frac{2}{3}$ и $\cos x > 0$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\operatorname{ctg} x < 0$;

3) $\operatorname{tg} x = 2$ и $\sin x < 0$; 4) $\operatorname{ctg} x = -0{,}8$ и $\sin x < 0$.

255. Найти по таблице острый угол x, если:

1) $\sin x = 0{,}6820$; 2) $\cos x = 0{,}8599$; 3) $\operatorname{tg} x = 3{,}655$;
4) $\operatorname{ctg} x = 0{,}7002$; 5) $\sin 2x = 0{,}8829$; 6) $\cos(x + 30°) = 0{,}2588$;
7) $\operatorname{tg}\frac{x + 50°}{2} = 1{,}0724$; 8) $\operatorname{ctg}(2x - 15°) = 0{,}2679$.

256. Найти по таблице угол x, если:

1) $\sin x = -0{,}7880$ и $180° < x < 270°$;
2) $\sin x = 0{,}4226$ и $90° < x < 180°$;
3) $\operatorname{tg} x = 1{,}4281$ и $180° < x < 270°$;
4) $\cos x = -0{,}4384$ и $90° < x < 180°$;
5) $\operatorname{tg} x = -14{,}30$ и $270° < x < 360°$;
6) $\operatorname{ctg} x = -0{,}6009$ и $90° < x < 180°$.

257. Найти угол A треугольника, если:

1) $\sin A - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$; 2) $\operatorname{ctg} A + 1 = 0$;

3) $\cos A = -0{,}0872$ (по таблице); 4) $\operatorname{tg} 2A = -1{,}881$ (по таблице).

258. Найти все положительные значения угла x в границах от 0° до 360°, если:
1) $\sin 2x = -0{,}9397$ (по таблице); 2) $\cos(x + 15°) = 0$;
3) $\operatorname{tg}^2 x = 1$; 4) $\sin^2 x = 0{,}5$; 5) $\operatorname{ctg}^2 x = 3$;
6) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$; 7) $2\cos^2(x - 20°) + \cos(x - 20°) - 1 = 0$;
8) $\sin(\sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (по таблице); 9) $\cos(\operatorname{tg} x) = -1$.

§ 8. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла

259. Существует ли такое значение угла x, для которого:
1) $\sin x = \frac{12}{13}$, а $\cos x = \frac{5}{13}$? 2) $\sin x = \frac{2}{5}$, а $\cos x = 0{,}8$?
3) $\sin x = \frac{2}{3}$, а $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$? 4) $\cos x = \frac{20}{101}$, а $\operatorname{tg} x = 4{,}95$?

260. Какие тригонометрические функции одного и того же угла являются взаимно обратными величинами?

261. Выразить тригонометрические функции угла α через: 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$; 5) $\sec\alpha$; 6) $\operatorname{cosec}\alpha$ и результаты записать в таблицу:

Данная функция / Искомая функция	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\operatorname{tg}\alpha$						
$\operatorname{ctg}\alpha$						
$\sec\alpha$						
$\operatorname{cosec}\alpha$						

262. Найти все тригонометрические функции угла α, если известно, что:
1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -0{,}6$; 3) $\cos\alpha = \frac{45}{53}$;

4) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}225$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = -3\frac{3}{7}$;

7) $\operatorname{ctg}\alpha = 1\frac{7}{8}$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}4$; 9) $\sec\alpha = -1{,}45$;

10) $\operatorname{cosec}\alpha = 5\frac{1}{20}$; 11) $\sin\alpha = \frac{m}{n}$, $0 < m < n$.

263. Полагая $0° < \alpha < 90°$, вычислить значение тригонометрической функции угла α по заданному значению другой тригонометрической функции того же угла:

1) $\sin\alpha = 0{,}28$; вычислить $\cos\alpha$;

2) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; вычислить $\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$; вычислить $\operatorname{cosec}\alpha$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$; вычислить $\sin\alpha$;

5) $\sec\alpha = \frac{25}{24}$; вычислить $\sin\alpha$;

6) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; вычислить $\cos\alpha$.

264. Считая $90° < \alpha < 180°$, вычислить значение тригонометрической функции угла α по заданному значению другой тригонометрической функции того же угла:

1) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$; вычислить $\sin\alpha$;

2) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$; вычислить $\sec\alpha$;

3) $\operatorname{cosec}\alpha = 5{,}05$; вычислить $\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}5$; вычислить $\cos\alpha$;

5) $\sec\alpha = -1\frac{1}{24}$; вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$;

6) $\operatorname{tg}\alpha = -2$; вычислить $\operatorname{cosec}\alpha$.

265. Положив $180° < \alpha < 270°$, вычислить значение тригонометрической функции угла α по заданному значению другой тригонометрической функции того же угла:

1) $\sec\alpha = -2{,}125$; вычислить $\sin\alpha$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$; вычислить $\sin\alpha$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$; вычислить $\sec\alpha$;

4) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{18}$; вычислить $\cos\alpha$;

6) $\sin\alpha = -\sqrt{1-a^2}$; вычислить $\cos\alpha$.

Каким должно быть число a?

266. Принимая $270° < \alpha < 360°$, вычислить значение тригонометрической функции угла α по заданному значению другой тригонометрической функции того же угла:

1) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$; вычислить $\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha = 0{,}5\sqrt{3}$; вычислить $\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$; вычислить $\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\operatorname{cosec}\alpha = -1\frac{2}{3}$; вычислить $\cos\alpha$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; вычислить $\operatorname{cosec}\alpha$;

6) $\sec\alpha = 1{,}25$; вычислить $\operatorname{cosec}\alpha$.

267. Дано: $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, $\cos\alpha = 1 + a$.
Вычислить $\sin\alpha$. Каким должно быть число a?

268. Дано: $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, $\sec\alpha = 1 + a$.
Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$. Каким должно быть число a?

Упростить следующие выражения* (задачи 269—289 устно):

269. $1 - \sin^2\alpha$. **270.** $1 - \cos^2\alpha$.

271. $\cos^2\alpha - 1$. **272.** $(1 + \sin\alpha)\cdot(1 - \sin\alpha)$.

273. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1$. **274.** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$.

275. $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$. **276.** $\sec^2\alpha - 1$.

277. $1 - \operatorname{cosec}^2\alpha$. **278.** $\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)$.

279. $\operatorname{ctg}\alpha(\sec^2\alpha - 1)$.

280. $\frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$. **281.** $\frac{\cos^2\beta - 1}{\sin^2\beta - 1}$. **282.** $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$. **283.** $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

284. $\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sec\alpha$. **285.** $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$.

286. $\sin\beta : \operatorname{tg}\beta$. **287.** $\operatorname{tg}\beta\,.\operatorname{ctg}\beta$.

288. $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$. **289.** $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$.

290. $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha + 1)$.

291. $(1 + \sin^2\alpha)\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{cosec}^2\alpha$.

292. $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$. **293.** $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - 1}$.

294. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$. **295.** $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$. **296.** $\frac{1}{\sec^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}$.

297. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

298. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

299. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)}{\sin^2\alpha\cdot\sec^2\alpha}$. **300.** $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$.

301. $\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$. **302.** $\frac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$. **303.** $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$.

304. $\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$. **305.** $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2$.

306. $\sin^2\alpha\cdot\sec^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. **307.** $\frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

---

* В упражнениях на тождественные преобразования тригонометрических выражений и в ответах к ним допустимые значения букв не указаны; учащиеся должны это сделать сами, дополнив ответ в соответствии с результатами исследования.

308. $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}$. **309.** $\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

310. $\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$. **311*.** $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

312. $\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)$.

Проверить следующие равенства (задачи 313—318):

313. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

314. $(\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = \cos^2\alpha$.

315. $\operatorname{tg} 25° + \operatorname{ctg} 25° = \sec 25° \cdot \operatorname{cosec} 25°$.

316. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = (1+\sin\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha)$.

317. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

318. $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta}$.

319. Показать, что величина выражения

$$(a\sin\beta + b\cos\beta)^2 + (b\sin\beta - a\cos\beta)^2$$

не зависит от величины угла β.

320. Выразить $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ через $\sin\alpha$.

Вычислить (задачи 321—322):

321. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

322. $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ при: а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$, (2).

323. Вычислить $\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$.

324. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = p$. Найти:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; 2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;

3) $\sin\alpha - \cos\alpha$; 4) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

325. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$. Определить:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ и 2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

326. Вычислить $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, если $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2}{5}$.

327. Вычислить $\operatorname{tg}^2\alpha + \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 5$.

328. Доказать неравенство при $0° < \alpha < 90°$:

1) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$; 2) $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha \geqslant 2$;

3) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \geqslant 2$; 4) $\sin^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha \geqslant 2$.

При каком значении угла α имеет место знак равенства?

---

* Здесь и в дальнейшем $\sqrt{a}$ рассматривается как арифметический корень.

Доказать тождества (задачи 329—351):

329. $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1$.

330. $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$. **331.** $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - 1} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

332. $1 + \sin\alpha = \frac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

333. $(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta) + (\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$.

334. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) - (\sec\alpha + \sec\beta)(\sec\alpha - \sec\beta) = 0$.

335. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \sin^2\alpha$.

336. $\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha}$. **337.** $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

338. $\frac{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1+\sec\alpha+\sec^2\alpha} = \cos^2\alpha$.

339. $\frac{1}{1+\sin^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\alpha} = 1$.

340. $\frac{2-\sec^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha = -1$.

341. $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

342. $\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha + \sec^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}\alpha$ при $0° < \alpha < 45°$.

343. $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -2\operatorname{ctg}\alpha$ при $180° < \alpha < 270°$.

344. $\sin^3\alpha\cdot(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$.

345. $1 - (\sin^6 a + \cos^6 a) = 3\sin^2 a\cdot\cos^2 a$.

346. Исключить угол α из системы равенств:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha = x \\ \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = y. \end{cases}$$

347. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$;

2) $y = \cos^2 x - 2\sin^2 x$.

348. При каких значениях x на отрезке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ нижеследующие функции принимают наибольшее и наименьшее значения:

1) $y = \sin^2(\cos x) + 0{,}5\cos^2(\cos x)$;

2) $y = \sin^2(\sin x) - 2\cos^2(\sin x)$.

Найти эти зчачения функции (по таблице).

349. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$$y = a\sin^2 x + b\cos^2 x.$$

Найти угол x (задачи 350—354), если:

350. $8\sin^2 x - 2\cos x = 5$ и $0° < x < 90°$.

351. $3\sin x = 2\cos^2 x$ и $0 < x < \pi$.

352. $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x \cdot \operatorname{tg} x = 0$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

353. $\sin^3 x(1 - \operatorname{ctg} x) - \cos^3 x(1 - \operatorname{tg} x) = 0$ и $0° < x < 90°$.

354. $2\sin^2 x - 3\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

§ 9. Формулы приведения

355. Какие функции называются периодическими? Что называется периодом функции?

356. Проверить справедливость равенства

$$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Можно ли на основании этого равенства утверждать, что $\frac{\pi}{2}$ есть период функции $\sin x$?

357. Проверить справедливость равенства

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Можно ли на основании этого равенства утверждать, что π есть период функции $\cos x$?

358. Чему равен период синуса? косинуса? тангенса? котангенса? Какими равенствами можно записать периодичность тригонометрических функций: $\sin x$; $\cos x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$?

359. Являются ли периодическими функции:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = x + \sin x$;

3) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$; 4) $y = \operatorname{tg} x - 1$;

5) $y = \sin(\cos x)$; 6) $y = \operatorname{tg}(\sin x)$?

360. Доказать, что:

1) период $\sin nx$ и $\cos nx$ равен $\frac{2\pi}{n}$ (n — некоторое положительное число);

2) период $\operatorname{tg} nx$ и $\operatorname{ctg} nx$ равен $\frac{\pi}{n}$ (n — некоторое положительное число).

361. Найти период функций:

1) $y = \sin x + \cos x$;

2) $y = \sin 2x$; 3) $y = \cos\frac{x}{2}$; 4) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

5) $y = \operatorname{tg} 2x$; 6) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 7) $y = \sin\frac{x}{n}$;

8) $y = \sin^2 x$; 9) $y = \sin x \cdot \cos x$; 10) $y = \sin \frac{x}{5} : \sin \frac{x}{4}$;

11) $y = \cos(2 \operatorname{tg} x)$; 12) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3} \sin x\right)$.

362. Доказать, что:

1) $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$; 2) $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$

(свойство половины периода).

363. Вычислить:

1) $\cos 10\pi$; 2) $\sin 7\pi$; 3) $\sin 930°$; 4) $\cos(-480°)$;

5) $\cos 15{,}5\pi$; 6) $\sin\left(-7\frac{5}{6}\pi\right)$.

Доказать формулы (задачи 364—367):

364. $\sin(\alpha + k\pi) = \begin{cases} \sin\alpha, & \text{если } k = 2n; \\ -\sin\alpha, & \text{если } k = 2n+1. \end{cases}$

365. $\cos(\alpha + k\pi) = \begin{cases} \cos\alpha, & \text{если } k = 2n; \\ -\cos\alpha, & \text{если } k = 2n+1. \end{cases}$

366. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\pi) + \sin(\alpha+2\pi) + \sin(\alpha+3\pi) + \ldots$

$$\ldots + \sin(\alpha + k\pi) = \begin{cases} \sin\alpha, & \text{если } k = 2n; \\ 0, & \text{если } k = 2n+1. \end{cases}$$

367. $\cos\alpha + \cos(\alpha+\pi) + \cos(\alpha+2\pi) + \cos(\alpha+3\pi) + \ldots$

$$\ldots + \cos(\alpha + k\pi) = \begin{cases} \cos\alpha, & \text{если } k = 2n; \\ 0, & \text{если } k = 2n+1. \end{cases}$$

368. Какая функция называется чётной? нечётной? Привести примеры.

369. Какие основные тригонометрические функции являются чётными? нечётными? Какими равенствами можно записать свойство чётности и нечётности тригонометрических функций?

370. Привести пример такой функции, которая выражалась бы при помощи основных тригонометрических функций и не являлась бы ни чётной, ни нечётной.

371. Определить величину выражений:

1) $\sin(a-b) + \sin(b-a)$; 2) $\operatorname{tg}(c-d) + \operatorname{tg}(d-c)$;

3) $\cos(a-b-c) - \cos(b+c-a)$;

4) $\cos(a-b) + \sin(a-b) + \sin(b-a) + \cos(b-a)$.

372. Показать, что функции: 1) $y = \frac{\sin x}{x}$; 2) $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$;

3) $y = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$ являются четными.

373. Показать, что функции: 1) $y = x + \sin x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

3) $y = \frac{\sin x}{\sin x^2}$ являются нечётными.

374. Указать, какие из нижеследующих функций являются чётными, нечётными и какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) $y = \sin x + \operatorname{ctg} x$; 2) $y = x^2 + \cos x$; 3) $y = \cos x - \operatorname{tg} x$;

4) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$; 5) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 6) $y = \sin x + 2$;

7) $y = \sin(\cos x)$; 8) $y = \cos(\operatorname{tg} x)$; 9) $y = \sin(\sin x)$.

Следующие тригонометрические функции привести к тригонометрическим функциям положительных углов, меньших 45° (задачи 375—408 устно):

375. $\sin 78°$. **376.** $\cos 53°$. **377.** $\operatorname{tg} 61°$.
378. $\operatorname{ctg} 50°$. **379.** $\sec 87°$. **380.** $\operatorname{cosec} 49°$.
381. $\sin 168°$. **382.** $\cos 123°$. **383.** $\operatorname{tg} 174°$.
384. $\operatorname{ctg} 146°$. **385.** $\sin 216°$. **386.** $\cos 200°$.
387. $\operatorname{tg} 263°$. **388.** $\operatorname{ctg} 194°$. **389.** $\sec 138°$.
390. $\sin 265°$. **391.** $\operatorname{tg} 209°$. **392.** $\operatorname{ctg} 353°$.
393. $\sec 316°$. **394.** $\operatorname{cosec} 285°$. **395.** $\sin 303°$.
396. $\cos 359°$. **397.** $\operatorname{tg} 356°$. **398.** $\operatorname{ctg} 289°$.
399. $\sin(-63°)$. **400.** $\cos(-81°)$. **401.** $\operatorname{tg}(-75°)$.
402. $\operatorname{ctg}(-105°)$. **403.** $\sec(-136°)$. **404.** $\operatorname{cosec}(-224°)$.
405. $\sin(-312°)$. **406.** $\cos(-161°)$. **407.** $\operatorname{tg}(-218°)$.
408. $\operatorname{ctg}(-112°)$. **409.** $\cos(-1952°)$. **410.** $\cos(-3000°)$.
411. $\sin 5000°$. **412.** $\operatorname{ctg} 1111°$. **413.** $\operatorname{tg} 1{,}2\pi$. **414.** $\sec \frac{14}{5}\pi$.
415. $\operatorname{ctg} 3$. **416.** $\sin 7$. **417.** $\cos 8$. **418.** $\operatorname{tg} 5$.

Следующие тригонометрические функции привести к тригонометрическим функциям острых положительных углов, сохранив наименование приводимой функции:

419. $\sin 152°$. **420.** $\cos 200°$. **421.** $\operatorname{tg} 345°$.
422. $\operatorname{ctg} 202°$. **423.** $\sec 187°$. **424.** $\operatorname{cosec} 340°$.
425. $\operatorname{tg} 153°$. **426.** $\sin 304°$. **427.** $\cos 317°$.
428. $\sin 501°$. **429.** $\operatorname{tg}(-118°)$. **430.** $\sec 617°$.
431. $\operatorname{ctg}(-213°)$. **432.** $\operatorname{tg}(-217°)$. **433.** $\sec(-131°)$.
434. $\cos 3215°$. **435.** $\sin 2012°$. **436.** $\operatorname{ctg}(-1862°)$.
437. $\operatorname{cosec}(-2011°)$. **438.** $\sin(-5737°)$. **439.** $\sec(-2626°)$.
440. $\cos 1037°$. **441.** $\sin(-592°)$. **442.** $\operatorname{ctg}(-1282°)$.
443. $\operatorname{tg} 0{,}7\pi$. **444.** $\sin 1{,}9\pi$. **445.** $\operatorname{ctg} 4{,}2\pi$.
446. $\cos 3{,}6\pi$. **447.** $\sec(-5{,}8\pi)$. **448.** $\operatorname{cosec}(-7{,}3\pi)$.
449. $\operatorname{ctg} 2$. **450.** $\cos 4$. **451.** $\sin 6$. **452.** $\operatorname{tg}(-3)$.

Следующие тригонометрические функции привести к тригонометрическим функциям острых положительных углов, изменив наименование приводимой функции на кофункцию:

453. $\sin 125°$. **454.** $\operatorname{tg} 278°$. **455.** $\cos 352°$.
456. $\sec 197°$. **457.** $\operatorname{ctg} 138°$. **458.** $\sec 312°$.
459. $\operatorname{cosec} 144°$. **460.** $\sin 512°$. **461.** $\cos 400°$.

462. $\operatorname{tg} 829°$. **463.** $\operatorname{ctg} 424°$. **464.** $\operatorname{cosec} 565°$.
465. $\operatorname{ctg}(-380°)$. **466.** $\cos(-490°)$. **467.** $\sec 1010°$.
468. $\operatorname{cosec} 999°$. **469.** $\sin 3108°$. **470.** $\cos 5619°$.
471. $\sin 1991°$. **472.** $\cos(-969°)$. **473.** $\operatorname{ctg}(-2814°)$.
474. $\cos(-4177°)$. **475.** $\operatorname{tg}(-1352°)$. **476.** $\sin(-2005°)$.
477. $\operatorname{ctg} 1952°$. **478.** $\cos(-4567°)$. **479.** $\operatorname{tg}(-1857°)$.
480. $\operatorname{cosec} 2{,}3\pi$. **481.** $\operatorname{ctg}(-0{,}8\pi)$. **482.** $\sin(-3{,}1\pi)$.
483. $\operatorname{tg} 5{,}4\pi$. **484.** $\cos 5{,}6\pi$. **485.** $\sec(-3{,}14\pi)$.
486. $\sin 2$. **487.** $\operatorname{tg} 10$. **488.** $\cos(-3)$.

Следующие тригонометрические функции привести к наименьшему положительному аргументу:

489. $\cos 1501°$. **490.** $\sin(-824°)$. **491.** $\cos 1900°$.
492. $\cos(-615°)$. **493.** $\operatorname{tg} 4020°$. **494.** $\operatorname{tg}(-700°)$.
495. $\sin(-70°)$. **496.** $\sec 683°$. **497.** $\operatorname{ctg} 1303°$. **498.** $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$.
499. $\sin(-1{,}4\pi)$. **500.** $\cos(-2{,}8\pi)$. **501.** $\operatorname{ctg}(-0{,}7\pi)$.
502. $\operatorname{cosec} 1{,}57\pi$. **503.** $\sec\frac{17}{9}\pi$. **504.** $\cos 6{,}5$. **505.** $\operatorname{tg} 9{,}2$.

506. Назовите несколько таких положительных и отрицательных углов, чтобы:
1) синус каждого из них был равен $\sin 23°$;
2) косинус каждого из них был равен $\cos 68°$;
3) тангенс каждого из них был равен $\operatorname{tg} 59°$;
4) котангенс каждого из них был равен $\operatorname{ctg} 38°$;
5) косинус каждого из них был равен $\sin 35°$;
6) тангенс каждого из них был равен $\operatorname{ctg} 25°$.

507. Почему для нахождения значений тригонометрических функций при любых допустимых значениях аргумента достаточно иметь таблицы значений этих функций для значений аргумента от 0° до 45°?

508. Вычислить: $\operatorname{tg} 41° \cdot \operatorname{tg} 42° \cdot \operatorname{tg} 43° \ldots \operatorname{tg} 49°$.

509. Вычислить: 1) $\sin 540°$; 2) $\sin 210°$; 3) $\cos 330°$; 4) $\cos(-855°)$; 5) $\operatorname{tg} 300°$; 6) $\cos 240°$; 7) $\operatorname{tg} 3810°$; 8) $\operatorname{ctg} 2{,}5\pi$; 9) $\cos\frac{8}{3}\pi$; 10) $\sin 7\frac{5}{6}\pi$.

510. Найти по таблицам:

1) $\cos 1482°$; 2) $\cos(-3301°)$; 3) $\sin 2128°$;
4) $\operatorname{tg}(-5188°)$; 5) $\sin(-2005°)$; 6) $\operatorname{ctg} 10000°$;
7) $\operatorname{tg} 10{,}1$; 8) $\sin 25$; 9) $\cos 17$.

Упростить выражения (задачи 511—514 устно):

511. $\sin 49° + \sin(-49°) + \cos 25° - \cos(-25°)$.
512. $\cos 33° - \cos 17° - \cos(-33°) - \sin 40° + \cos(-17°) - \sin(-40°)$.
513. $\cos 21° + \sin(-52°) + \cos(-21°) + \cos(-38°)$.
514. $\sin(\pi - 1) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

515. $\sin(360^\circ - \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$.

516. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

517. $\sin(\alpha + 90^\circ) - \sin(\alpha - 90^\circ) + 3\cos\alpha - 3\cos(360^\circ - \alpha)$.

518. $2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) - \operatorname{ctg}(\alpha - 270^\circ) + \operatorname{ctg}(\alpha + 90^\circ)$.

519. $\sec 420^\circ + \operatorname{cosec} 750^\circ - \cos 2160^\circ + \operatorname{ctg} 630^\circ$.

520. $\sin(90^\circ + \alpha) \cdot \sin(270^\circ - \alpha) + \cos(\alpha - 90^\circ) \cdot \sin(\alpha - 180^\circ)$.

521. $\sin 80^\circ \cdot \cos 350^\circ - \sin 190^\circ \cdot \cos 280^\circ$.

522. $\operatorname{ctg} 65^\circ \cdot \operatorname{ctg} 115^\circ + \sec 155^\circ \cdot \sec 205^\circ$.

523. $\sin(180^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ + \alpha)$.

524. $\operatorname{tg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 288^\circ + \sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ$.

525. $\sin 695^\circ \cdot \cos 835^\circ + \sin 790^\circ \cdot \operatorname{tg} 560^\circ + \sin 700^\circ$.

526. $1 + \sin(x - 2\pi) \cdot \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 2\cos^2 x$.

527. $\sin^2(\pi - x) + \operatorname{tg}^2(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(x - 2\pi)$.

528. $\left(\frac{\operatorname{tg}^2 590^\circ}{\cos^2 320^\circ} + \sin 111^\circ \cdot \sec 159^\circ\right) \times \left(\cos 279^\circ \cdot \operatorname{cosec} 549^\circ + \frac{\operatorname{ctg}^2 950^\circ}{\sin^2 400^\circ}\right)$.

Доказать следующие тождества (задачи 529—541):

529. $\cos(45^\circ - \alpha) = \sin(45^\circ + \alpha)$.

530. $\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$.

531. $(\sec 352^\circ - \sin 172^\circ \cdot \operatorname{ctg} 262^\circ) \cdot (\cos^2 100^\circ + \cos^2 350^\circ) = \cos 8^\circ$.

532. $\sin 390^\circ \cdot \sin 510^\circ + \cos 570^\circ \cdot \cos 870^\circ + \operatorname{tg} 600^\circ \cdot \operatorname{tg} 1110^\circ = 2$.

533. $\sin 450^\circ \cdot \cos 675^\circ + \operatorname{tg} 562^\circ \cdot \operatorname{tg} 788^\circ + \sec 660^\circ \cdot \sec 1200^\circ = -2{,}5$.

534. $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)\right]^2 = 2$.

535. $\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2 + \left[\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} + \operatorname{ctg}(\pi - x)\right]^2 = 2\operatorname{cosec}^2 x$.

536. $\sin^2 370^\circ \cdot \sec^2 440^\circ + \cos^2 160^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 200^\circ = \operatorname{cosec}^2 20^\circ$.

537. $\sin^2 340^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 250^\circ + \cos^2 185^\circ \cdot \sec^2 365^\circ = \sec^2 20^\circ$.

538. $\dfrac{\sin(x-\pi)\cdot\cos(x-2\pi)\cdot\operatorname{tg}(1{,}5\pi+x)}{\sin(0{,}5\pi-x)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-x)\cdot\operatorname{cosec}(2\pi-x)}=\sin^2 x.$

539. $\dfrac{\sin(\pi+x)\cdot\cos(1{,}5\pi-x)\cdot\operatorname{tg}(x-0{,}5\pi)}{\cos(0{,}5\pi+x)\cdot\cos(1{,}5\pi+x)\cdot\operatorname{tg}(\pi+x)}=\operatorname{ctg}^2 x.$

540. $\sin(2\pi-x)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\cos(x-\pi)-\sin(x-\pi)=\sin x.$

541. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{3}+x\right)+$
$+\operatorname{tg}(\pi+x)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right).$

542. Определить $\cos x$, если $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=$
$=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

543. Дано: A, B и C — углы треугольника; доказать:

1) $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$; 2) $\sin(A+B)=\sin C$;

3) $\cos(A+B)=-\cos C$; 4) $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

544. Дана общая формула, выражающая величину угла: $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, где k — любое целое число (положительное, отрицательное и нуль).

1) Вычислить углы при $k=0$; 1; 2; 3.

2) Найти синус, косинус, тангенс и котангенс каждого из этих углов.

545. Найти частные значения угла $x=45°(3k+1)$, полагая $k=0$; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, и заполнить таблицу:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x								
$\sin x$								
$\cos x$								
$\operatorname{tg} x$								
$\operatorname{ctg} x$								

546. Найти все положительные значения угла $x=30°(3k\pm1)$ ($k=0;\ \pm1,\ \pm2;\ldots$) в границах от 0° до 360°.

547. Найти множество всех углов, имеющих данное значение тригонометрической функции:

1) $\operatorname{tg} x=1$;
2) $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$;
3) $\cos x=0$;
4) $\sin x=\pm1$;
5) $\cos x=\frac{1}{2}$.

548. Найти множество всех углов, синус которых равен $0{,}5\sqrt{2}$, и найти угол, больший 5000°, синус которого был бы равен $0{,}5\sqrt{2}$.

549. Найти множество всех углов, косинус которых равен $\sin 600°$.

550. Найти наименьший положительный угол x, удовлетворяющий уравнению:

$$\sin(\cos x)=\cos\frac{5\pi}{3}\ \text{(по таблице)}.$$

Решить уравнения (задачи 551—555):

551. 1) $\operatorname{tg} x+1=0$; 2) $2\cos x+\sqrt{2}=0$;
3) $2\sin x-1=0$; 4) $3\operatorname{ctg}(x-15°)-\sqrt{3}=0$.

552. 1) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$;
2) $2\operatorname{ctg}(180°-x)-\operatorname{ctg}405°-\operatorname{ctg}(360°-x)=0$;
3) $\sin(x+30°)-\sin(210°+x)=2\sin 495°$.

553. 1) $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$;
2) $\cos 600°+\cos(x-200°)+\sin(x+250°)=\sin 870°$.

554. 1) $\cos(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$;
2) $\sin(x-90°)+\sin(x-180°)=0$;
3) $\sin(x-60°)=\cos(x+30°)$;
4) $\sin(45°-x)=0{,}5\cos(45°+x)$.

555. $\operatorname{tg}(202°+x)\cdot\cos 1020°=\sin(-690°)$.

§ 10. Графики тригонометрических функций

556. Установить область определения функции $y=\sin x$.

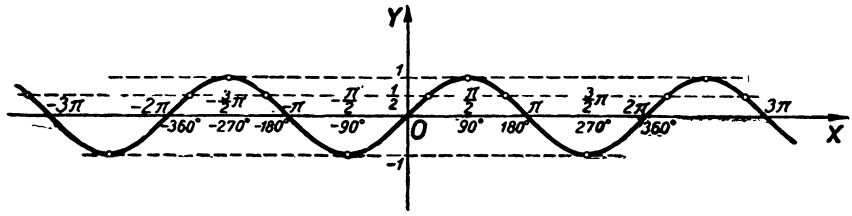
557. Исходя из свойств функции $\sin x$, сделать от руки набросок графика функции $y=\sin x$, откладывая на горизонтальной оси значения аргумента x, а по вертикальной оси — значения функции $\sin x$.

558. Заполнить следующую таблицу:

x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$
$-360°$		$-180°$		$0°$		$180°$	
$-330°$		$-150°$		$30°$		$210°$	
$-300°$		$-120°$		$60°$		$240°$	
$-270°$		$-90°$		$90°$		$270°$	
$-240°$		$-60°$		$120°$		$300°$	
$-210°$		$-30°$		$150°$		$330°$	
						$360°$	

Пользуясь данными таблицы, уточнить набросок графика функции (см. задачу 557).

559. Построить геометрическим путём график функции $y = \sin x$.



Черт. 38.

560. Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, показать, что:

1) функция $\sin x$ с изменением аргумента x от 0 до 2π сначала возрастает от 0 до 1, затем уменьшается от 1 до -1 и затем вновь возрастает от -1 до 0;

2) функция $\sin x$ есть периодическая функция с периодом 2π;

3) функция $\sin x$ изменяется в границах от -1 до $+1$;

4) функция $\sin x$ при изменении произвольного значения аргумента x на π, меняет лишь свой знак на противоположный, т. е. $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$ (свойство половины периода);

5) функция $\sin x$ является нечётной функцией.

561. Пользуясь графиком функции $y = \sin x$ (черт. 38), ответить устно на следующие вопросы:

1) Как изменяется $\sin x$ при изменении угла (дуги) x:

а) от $90°$ до $270°$? б) от $540°$ до $720°$? в) от $90°$ до $-90°$? г) от $-\pi$ до π? д) от 0 до -2π?

2) Можно ли сказать, что функция $\sin x$ есть возрастающая функция в промежутке: а) от $-90°$ до $90°$? б) от $-\frac{3}{2}\pi$ до $-\frac{\pi}{2}$? в) от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$?

3) Чему равен синус угла (дуги), содержащего 270°? —180°? —270°? 450°?

4) Что больше: а) $\sin 30°$ или $\sin 60°$? б) $\sin 30°$ или $\sin(-30°)$? в) $\sin\pi$ или $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$?

5) Назовите отрицательные углы, синус которых равен: а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0.

6) Каково наибольшее положительное значение синуса и когда оно достигается?

7) Если угол (дуга) равен 30°, то сколько значений имеет синус этого угла (дуги)?

8) Дано: $\sin x = \frac{1}{2}$. Сколько существует углов (дуг), удовлетворяющих данному равенству? Назовите некоторые из них.

562. Построить графики функций:

$$1)\ y = -\sin x;\quad 2)\ y = |\sin x|;\quad 3)\ y = \sin|x|.$$

Чем отличаются графики этих функций от графика функции $y = \sin x$?

563. Чем отличаются друг от друга графики функций:

1) $y = \sin x$ и $y = \sin(x + a)$? 2) $y = \sin x$ и $y = 2\sin x$?

3) $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}\sin x$? 4) $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$?

5) $y = \sin x$ и $y = 1 + \sin x$? 6) $y = \sin x$ и $y = \sin(\sin x)$?

564. Установить область определения функции $y = \cos x$.

565. Построить график функции $y = \cos x$.

Выяснить по графику изменение функции $\cos x$ при изменении аргумента x от 0 до 2π.

Пользуясь графиком, показать, что:

1) функция $\cos x$ есть периодическая функция с периодом 2π;

2) функция $\cos x$ изменяется в границах от -1 до $+1$;

3) функция $\cos x$ при изменении произвольного значения аргумента x на π меняет лишь свой знак на противоположный, т. е. $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$ (свойство половины периода);

4) функция $\cos x$ является чётной функцией.

566. Пользуясь графиком функции $y = \cos x$ (черт. 39), ответить устно на следующие вопросы:

1) Как изменяется функция $\cos x$, если: а) аргумент x увеличивается от -2π до $-\pi$? б) аргумент x уменьшается от $\frac{5}{2}\pi$ до $\frac{3}{2}\pi$?

2) Чему равен косинус угла (дуги), содержащего 180°? 450°? —90°? —360°?

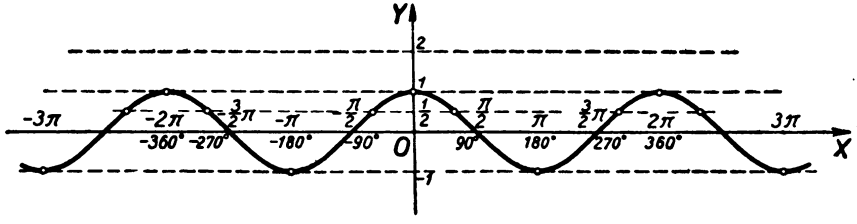
3) Что меньше: а) $\cos 0°$ или $\cos(-360°)$? б) $\cos(-180°)$ или $\cos 270°$?

567. Указать по графику области значений аргумента x, где функция $y = \cos x$: а) положительна; б) отрицательна; в) убывает; г) возрастает.

568. При каких значениях x функция $\cos x$ имеет наименьшее значение и какое именно?

569. Найти по графику значения x, при которых функция $y = \cos x$ равна 1.

570. Проиллюстрировать на графике, что не существует значений аргумента x, при которых функция $y = \cos x$ была бы равна 2.



Черт. 39.

571. Пользуясь графиком, указать несколько значений аргумента x, для которых функция $y = \cos x$ была бы равна $\frac{1}{2}$.

572. Пользуясь графиком, назвать несколько отрицательных значений аргумента, при которых функция $\cos x$ обращается в нуль.

573. Построить график косинуса, воспользовавшись формулой приведения: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

574. На одном и том же чертеже построить графики функций: $y = \sin x$ и $y = \cos x$ (черт. 40). Сопоставляя графики синуса и косинуса, проиллюстрировать соотношения:

1) $\sin(45° - \alpha) = \cos(45° + \alpha)$;
2) $\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha)$.

575. Путём сравнения графиков функций:

1) $\cos(180° + x)$ и $-\cos x$, 2) $\cos(90° + x)$ и $-\sin x$

проиллюстрировать формулы приведения:

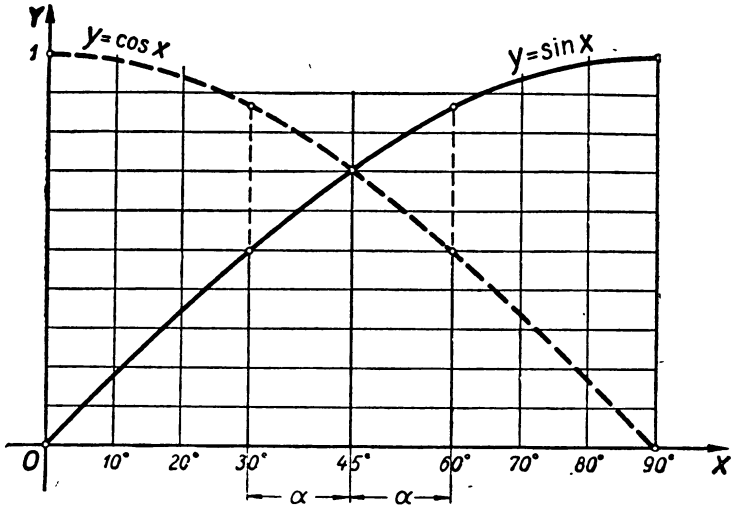
1) $\cos(180° + x) = -\cos x$; 2) $\cos(90° + x) = -\sin x$.

576. Дана функция $y = |\cos x|$. Не вычерчивая графика этой функции, описать:

1) вид и положение кривой относительно осей координат;
2) будет ли функция иметь наибольшее или наименьшее значение, какое именно и при каком значении x;
3) при каких значениях $x\,(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ функция y: а) убывает? б) возрастает?

(**577.** Какова область определения функций: 1) $y = \operatorname{tg} x$; 2 $y = \operatorname{ctg} x$

578. Построить графики функций: 1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = \operatorname{ctg} x$. Выяснить по графику изменение функции $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) при изменении аргумента x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и от $\frac{\pi}{2}$ до π. Проиллюстрировать на графике, что функция $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) есть периодическая функция с периодом π.



Черт. 40.

579. Определить по графику (черт. 41), при каких значениях x функция $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$): а) убывает; б) возрастает. При каких значениях аргумента x нарушается постепенное изменение функции?

580. Можно ли сказать, что функция $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) есть убывающая функция в промежутке: а) $90° < x < 180°$? б) $-360° < x < -270°$?

581. Найти по графику, при каких значениях x функция $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) обращается в нуль.

582. Убедиться по графику функции $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) в том, что:

1) каждому значению аргумента x соответствует одно значение функции y; 2) каждому значению функции y соответствует множество вполне определённых значений аргумента x, расположенных в определённом порядке.

583. Имеют ли общие точки графики функций:

$$y = \operatorname{tg} x \text{ и } y = \operatorname{ctg} x?$$

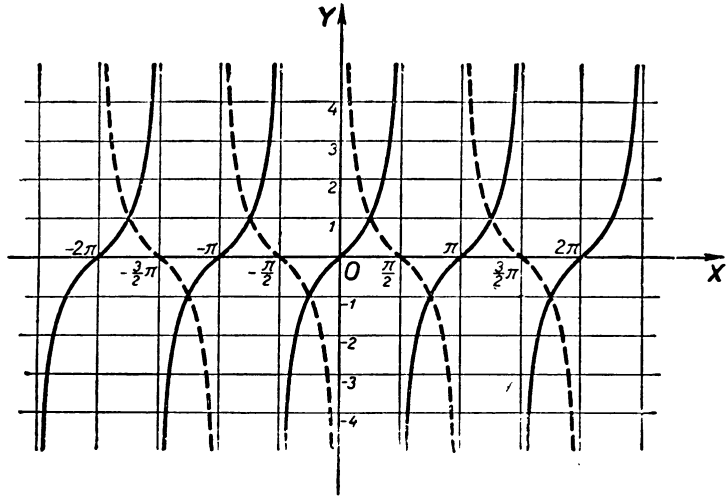
584. Чем отличаются друг от друга области определения функций: $\cos x$ и $\operatorname{ctg} x$?

585. Начертить на одном и том же чертеже графики функций:

$$y = x,\ y = \sin x \text{ и } y = \operatorname{tg} x, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь чертежом, проиллюстрировать неравенство:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$



Черт. 41.

Решить графически следующие уравнения (задачи 586—591):

586. $\sin x = 0$. **587.** $\cos x = 0$.

588. $\cos x = m$, где $m > 0$. При решении рассмотреть три случая: а) $m < 1$; б) $m = 1$; с) $m > 1$.

589. $\sin x = x$. **590.** $\sin x = -x$.

591. $2x + \pi \cos x = \pi$.

592. Сколько действительных корней имеют уравнения:

$$1)\ x^2 - \sin|x| = 0?\quad 2)\ x \sin x = 1?$$

593. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} x = x.$$

594. В промежутке от 0 до 2π найти все корни уравнения:

$$2 \sin 3x = \operatorname{cosec} x.$$

ГЛАВА III

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 11. Формулы сложения и вычитания

Синус и косинус суммы и разности двух любых углов

595. Упростить: 1) $\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$; 2) $\cos(\alpha-60^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

596. α и β — острые положительные углы; $\sin\alpha=\frac{5}{13}$; $\sin\beta=\frac{3}{5}$. Вычислить: 1) $\sin(\alpha+\beta)$; 2) $\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$; 4) $\cos(\alpha-\beta)$.

597. Вычислить значения синуса и косинуса углов: 1) 15°; 2) 75°; 3) 105°.

598. Получить при помощи формул синуса и косинуса суммы и разности двух углов формулы приведения:

1) $\sin(90^\circ\pm\alpha)$; 2) $\sin(180^\circ\pm\alpha)$; 3) $\sin(270^\circ\pm\alpha)$;
4) $\sin(360^\circ-\alpha)$; 5) $\cos(90^\circ\pm\alpha)$; 6) $\cos(180^\circ\pm\alpha)$;
7) $\cos(270^\circ\pm\alpha)$; 8) $\cos(360^\circ-\alpha)$.

599. Вычислить $\sin(30^\circ+\alpha)$, если $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$, причём α — угол 1-й четверти.

600. Вычислить $\cos(\alpha-30^\circ)$, если $\cos\alpha=-0{,}3\sqrt{10}$, причём α — угол 2-й четверти.

601. Дано: $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; $180^\circ<\alpha<270^\circ$. Найти $\sin(60^\circ-\alpha)$.

602. Дано: $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$; $270^\circ<\alpha<360^\circ$. Найти $\cos(60^\circ+\alpha)$.

603. Дано: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\sin\beta=-\frac{7}{25}$; $0^\circ<\alpha<90^\circ$ и $180^\circ<\beta<270^\circ$.

Найти: 1) $\sin(\alpha+\beta)$; 2) $\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$; 4) $\cos(\alpha-\beta)$.

604. Дано: $270^\circ<\alpha<360^\circ$; $180^\circ<\beta<270^\circ$; $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$; $\operatorname{tg}\beta=1\frac{7}{8}$. Вычислить $\cos(\alpha-\beta)$.

605. Синусы двух острых углов треугольника соответственно равны $\frac{20}{29}$ и $\frac{3}{5}$. Найти косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными.

606. Косинусы двух углов треугольника соответственно равны $\frac{12}{13}$ и $\frac{20}{101}$. Найти синус третьего угла.

Упростить следующие выражения (задачи 607—614 устно):

607. $\sin 12^\circ \cdot \cos 13^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 13^\circ$.

608. $\sin 77^\circ \cdot \sin 88^\circ + \cos 77^\circ \cdot \cos 88^\circ$.

609. $\sin 4{,}25 \cdot \cos 1{,}11 - \sin 1{,}11 \cdot \cos 4{,}25$.

610. $\sin 32^\circ \cdot \sin 68^\circ - \cos 32^\circ \cdot \cos 68^\circ$.

611. $\sin(\alpha + \beta) \pm \sin(\alpha - \beta)$.

612. $\cos(\alpha + \beta) \pm \cos(\alpha - \beta)$.

613. $\sin(\alpha + 45^\circ) \cdot \cos(\alpha - 45^\circ) - \cos(\alpha + 45^\circ) \cdot \sin(\alpha - 45^\circ)$.

614. $\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)$.

615. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta \cdot \cos\alpha}$.

616. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

617. $\dfrac{\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\sin 5^\circ \cdot \cos 10^\circ - \sin 10^\circ \cdot \cos 5^\circ}$.

618. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5} \cdot \sin\frac{2\pi}{15} - \cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{15}}$.

619. $\cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cdot \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cdot \cos 79^\circ$.

620. $\sin 20^\circ + \sin 13^\circ \cdot \sin 57^\circ - \sin 33^\circ \cdot \sin 77^\circ$.

621. $\sin 51^\circ - \sin 28^\circ \cdot \cos^3 23^\circ - \cos 28^\circ \cdot \sin^3 23^\circ$.

622. $\cos 1^\circ + \cos 121^\circ + \cos 241^\circ + \sin 361^\circ$.

623. $\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ$.

Доказать следующие тождества (задачи 624—636):

624. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

625. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

626. $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \cos\alpha - 2\cos(45^\circ + \alpha)}{2\sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

627. $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin(60^\circ - \alpha)}{2\cos(30^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

628. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta \cdot \cos\alpha}$.

629. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$.

630. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$.

631. $\sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2\sin 203^\circ \cdot (\sin 112^\circ + \sin 158^\circ) = 0$.

632. $\cos 35^\circ + \cos 125^\circ + 2\sin 185^\circ \cdot (\sin 130^\circ + \sin 140^\circ) = 0$.

633. $\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \sin^2(\alpha + 30^\circ) - \sin^2\alpha = 0{,}5$.

634. $\cos^2(\alpha - 30^\circ) + \cos^2(\alpha + 30^\circ) + \sin^2\alpha = 1{,}5$.

635. $\sin\alpha \cdot \sin(\beta + \gamma) - \sin\beta \cdot \sin(\alpha + \gamma) + \sin\gamma \cdot \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma$.

636. $\cos\alpha\cdot\cos(\beta+\gamma)-\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\gamma)+\cos\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta)=$
$=\cos(\alpha-\beta-\gamma)$.

637. Выразить $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ и $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ через тригонометрические функции углов α, β, γ.

638. Вычислить (по таблице):

1) $\sin(\sin 1)\cdot\sin(\sin 2)-\cos(\sin 1)\cdot\cos(\sin 2)$;

2) $\sin(\cos 1{,}5)\cdot\cos(\cos 2{,}2)-\sin(\cos 2{,}2)\cdot\cos(\cos 1{,}5)$.

639. Дано: $x=A\sin(m+n)$; $y=A\sin(m-n)$. Показать, что $x+y=2A\sin m\cdot\cos n$.

640. Показать, что $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$, если α и β — острые углы.

641. Доказать, что: 1) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ>1$; 2) $\sin 15^\circ+\sin 45^\circ>0{,}8$; 3) $\sin 25^\circ+\cos 85^\circ>0{,}5$.

Решить следующие уравнения (задачи 642—647):

642. 1) $\sin(20^\circ+x)+\sin(20^\circ-x)=0$;

2) $\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)=0$;

3) $\cos(\alpha+x)-\cos(\alpha-x)=0$;

4) $\cos(a+\sin x)+\cos(a-\sin x)=0$.

643. $\cos(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha-x)+\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$.

644. $1+\sin x\cdot\sin 2x=\cos x\cdot\cos 2x$.

645. $\sin(x+30^\circ)+\cos(x+60^\circ)=2\cos^2 x$.

646. $2\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$.

647. $\cos(120^\circ-x)+\cos(120^\circ+x)=1$.

Тангенс суммы и разности двух любых углов

648. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$. Вычислить: 1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

649. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$; найти $\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$

650. Вычислить: 1) $\operatorname{tg}15^\circ$; 2) $\operatorname{tg}75^\circ$; 3) $\operatorname{tg}105^\circ$.

651. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=1$.

Найти: 1) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$; 2) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$.

652. Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)$, если $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ и α — угол 3-й четверти.

653. Вычислить $\operatorname{ctg}(\alpha+45^\circ)$, если $\sin\alpha=-0{,}5$ и α — угол 4-й четверти.

654. Выразить $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$ через $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$.

Вычислить (задачи 655 — 658):

655. $\dfrac{\operatorname{tg}26^\circ+\operatorname{tg}19^\circ}{1-\operatorname{tg}26^\circ\cdot\operatorname{tg}19^\circ}$. **656.** $\dfrac{\operatorname{tg}14^\circ-\operatorname{tg}44^\circ}{\operatorname{tg}14^\circ\cdot\operatorname{tg}44^\circ+1}$.

657. $\dfrac{1-\operatorname{tg}74^\circ\cdot\operatorname{tg}76^\circ}{\operatorname{tg}74^\circ+\operatorname{tg}76^\circ}$. **658.** $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}+\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}$.

Упростить следующие выражения (задачи 659—665):

659. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$.

660. $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$. **661.** $\dfrac{\operatorname{tg}2{,}22+\operatorname{tg}0{,}92}{1-\operatorname{tg}2{,}22\cdot\operatorname{tg}0{,}92}$.

662. $\dfrac{\operatorname{tg}1{,}47-\operatorname{tg}0{,}69}{1+\operatorname{tg}1{,}47\cdot\operatorname{tg}0{,}69}$. **663.** $\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 15^\circ-1}{3-\operatorname{ctg}^2 15^\circ}$.

664. $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}$. **665.** $\dfrac{\operatorname{tg}50^\circ-\operatorname{tg}5^\circ-1}{\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{tg}50^\circ}$.

Доказать следующие тождества (задачи 666—671):

666. $(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$.

667. $\dfrac{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)+\operatorname{ctg}\beta}=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}$.

668. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

669. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 20^\circ-\operatorname{tg}^2 25^\circ}{\operatorname{ctg}^2 20^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 25^\circ-1}=\operatorname{ctg}5^\circ$.

670. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=2$.

671. $(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=2\operatorname{tg}\alpha\times$
$\times\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

672. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{7}$; α и β — острые углы. Показать, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

673. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\beta=3$; $90^\circ<\alpha<180^\circ$; $0^\circ<\beta<90^\circ$. Найти $\alpha+\beta$.

674. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$; α и β—острые углы. Найти $\alpha-\beta$.

675. Найти $\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=5$, $\operatorname{tg}\beta=1{,}5$.

676. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{5}$; $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{9}$; $0^\circ<\alpha<90^\circ$; $0^\circ<\beta<90^\circ$. Доказать, что $\alpha+\beta=135^\circ$.

677. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{12}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{5}$; $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{3}$, причём α, β, γ — острые углы Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma=45°$.

678. Тангенсы трёх острых углов соответственно равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$. Доказать, что первый угол равен сумме двух других углов.

Решить следующие уравнения (задачи 679 — 681):

679. $\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=1$. **680.** $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}+\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\operatorname{tg}2x-1}=\sqrt{3}$.

681. $\operatorname{tg}15°-\operatorname{tg}x=1+\operatorname{tg}15°\cdot\operatorname{tg}x$.

§ 12. Функции двойного и половинного аргумента

Функции двойного аргумента

682. Вычислить $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если 1) $\sin\alpha=0{,}96$ и $0°<\alpha<90°$; 2) $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$ и $\sin\alpha>0$.

683. Вычислить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2{,}4$ и $180°<\alpha<270°$.

684. $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$.

685. $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ выразить: 1) только через $\sin\alpha$; 2) только через $\cos\alpha$.

686. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выразить через $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$.

687. Выразить все тригонометрические функции аргумента x через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

688. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

689. Доказать, что $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$ при $0°<\alpha<90°$.

Вывести условие, при котором $\sin 2\alpha=2\sin\alpha$.

690. Известно, что $0°<\alpha<90°$. Что больше: 1) $\cos 2\alpha$ или $2\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg}2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha\neq 45°$?

691. Выразить соответственно через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$: 1) $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ и $\operatorname{tg}3\alpha$; 2) $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ и $\operatorname{tg}4\alpha$.

692. Исходя из равенства $\sin 36°=\cos 54°$ и пользуясь формулами $\sin 2\alpha$ и $\cos 3\alpha$, вычислить $\sin 18°$.

693. Дано: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=2{,}2$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

694. Дано: $\frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{39}{41}$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

695. $\operatorname{ctg}\alpha=2$. Найти $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$.

696. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{15}{17}$; определить синус и косинус угла при вершине.

697. Вычислить (задачи 1 — 3 устно):

1) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15$; 2) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$;

3) $\frac{2\operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$; 4) $4 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12}$;

5) $\cos^2 15^\circ - \cos^2 75^\circ$; 6) $\frac{10 \operatorname{tg} 0{,}3925}{1 - \operatorname{tg}^2 0{,}3925}$.

Упростить выражения (задачи 698 — 702 устно):

698. $2 \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ$.

699. $(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ) \cdot (\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)$.

700. 1) $(\sin \alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$; 2) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$.

701. 1) $1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; 2) $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$.

702. 1) $1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$; 2) $0{,}125 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$.

703. $\operatorname{tg} \alpha \cdot (1 + \cos 2\alpha)$. **704.** $2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha$.

705. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. **706.** $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

707. $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. **708.** $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

709. $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$. **710.** $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$.

711. $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$.

712. Вычислить: 1) $1 - 2 \sin^2 15^\circ$; 2) $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$;

3) $\frac{1 - 2 \sin^2 22^\circ 30'}{2 \cos^2 15^\circ - 1}$; 4) $\frac{2 \operatorname{tg}^2 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$; 5) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 9^\circ}{2 \operatorname{tg} 9^\circ}$.

Доказать тождества (задачи 713 — 728):

713. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$.

714. $4 \sin^4 \alpha + \sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha$.

715. $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ = 4$.

716. $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2 \operatorname{tg} 20^\circ$.

717. $\cos \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha \cdot \sec \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$.

718. $\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

719. $\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

720. $\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sec 2\alpha$.

721. $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha$.

722. $\sin 3\alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha - \cos 3\alpha \cdot \sec \alpha = 2$.

723. $\frac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

724. $\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$

725. $\frac{1 - 4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha - 1} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 3\alpha.$

726. $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + 15^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ)}{\operatorname{tg}(\alpha + 15^\circ) - \operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ)} = 2\sin 2\alpha.$

727. $16\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1.$

728. $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2 = 1.$

729. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
1) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 2) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

730. Доказать, что из всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Решить уравнения (задачи 731—737):

731. $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2.$

732. $\sin(45^\circ - x) \cdot \sin(45^\circ + x) = 0{,}5.$

733. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2.$

734. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = 2.$

735. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - x) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + x) = 1.$

736. $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = \sqrt{3}.$

737. $\frac{1 + \operatorname{tg}^2(45^\circ - x)}{1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ - x)} = 2.$

Функции половинного аргумента

738. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{161}{289}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

739. Полагая $360^\circ < \alpha < 450^\circ$, определить $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \frac{120}{169}$.

740. Определить $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{3}{7}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

741. Зная, что $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, определить тригонометрические функции угла $\frac{\alpha}{4}$

742. Найти без помощи таблиц синус, косинус и тангенс углов: 1) 22°30′; 2) 15°; 3) 7°30′.

743. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $\frac{7}{9}$; определить синус и косинус угла при основании.

744. Дано: $\cos 2\alpha = -\frac{527}{625}$ и $45° < \alpha < 90°$.

Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

745. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ выразить соответственно через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

746. Определить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}4$ и $270° < \alpha < 360°$.

Доказать тождества (задачи 747—752):

747. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **748.** $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

749. $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

750. $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

751. $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. **752.** $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Упростить (задачи 753—758):

753. $\frac{\sin 40°}{1-\cos 40°}$. **754.** $\frac{1+\cos 2}{\sin 2}$.

755. $\frac{\cos 10°}{1-\sin 10°}$. **756.** $\frac{1+\cos 1{,}1\pi}{\cos 0{,}6\pi}$.

757. $\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$. **758.** $(\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha)\cdot\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Доказать тождества (задачи 759—767):

759. $\sin\alpha\cdot(\sin\alpha + \sin\beta) + \cos\alpha\cdot(\cos\alpha + \cos\beta) = 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

760. $\sin\alpha\cdot(\sin\alpha - \sin\beta) + \cos\alpha\cdot(\cos\alpha - \cos\beta) = 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

761. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

762. $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

763. $\frac{2\sin A + \sin 2A}{2\sin A - \sin 2A} = \operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}$.

764. $\frac{1-\cos 2A + \sin 2A}{1+\cos 2A + \sin 2A} = \operatorname{tg} A$.

765. $\frac{1+\cos A + \cos 2A + \cos 3A}{\cos A + \cos 2A} = 2\cos A$.

766. $4\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{4\sin^4\alpha+\sin^2 2\alpha}=2,\quad 180^\circ<\alpha<270^\circ.$

767. $4\sin^2\frac{\alpha}{4}-\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}\right)^2}=2,$

$180^\circ<\alpha<270^\circ.$

Решить уравнения (задачи 768—770):

768. $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tg}^2 x.$ **769.** $\frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\sqrt{3}.$

770. $\frac{1+\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x+\cos 2x}=\sin x.$

§ 13. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и обратно

Пользуясь формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, представить в виде суммы следующие произведения (задачи 771—788):

771. $2\sin 15^\circ\cdot\cos 10^\circ.$ **772.** $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{8}.$

773. $\sin(x-y)\cdot\cos(x+y).$ **774.** $2\cos 3\cdot\sin 2.$

775. $\cos 15^\circ\cdot\cos 5^\circ.$ **776.** $2\cos(a+b)\cdot\cos(a-b).$

777. $\cos x\cdot\cos(x+1).$ **778.** $\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}+1\right).$

779. $\sin 55^\circ\cdot\sin 33^\circ.$ **780.** $2\sin A\cdot\sin 2A.$

781. $2\sin(m+n)\cdot\sin(m-n).$ **782.** $\sin 10^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 6^\circ.$

783. $4\sin 25^\circ\cdot\cos 15^\circ\cdot\sin 5^\circ.$ **784.** $4\sin 12^\circ\cdot\sin 14^\circ\cdot\sin 16^\circ.$

785. $4\cos 25^\circ\cdot\cos 35^\circ\cdot\cos 15^\circ.$ **786.** $8\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\cos 8^\circ.$

787. $8\sin A\cdot\sin 2A\cdot\sin 3A\cdot\sin 4A.$

788. $8\sin 1\cdot\cos 2\cdot\sin 4\cdot\cos 8.$

Пользуясь таблицами, найти числовые значения выражений (задачи 789—791).

789. $\sin 50^\circ\cdot\sin 15^\circ.$ **790.** $\sin 33^\circ\cdot\cos 47^\circ.$

791. $\sin 12^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 10^\circ.$

792. Вычислить: 1) $\sin 15^\circ\cdot\cos 45^\circ$; 2) $\sin\frac{\pi}{24}\cdot\sin\frac{5\pi}{24}$;

3) $\cos 75^\circ\cdot\sin 105^\circ.$

793. Выразить через тригонометрические функции кратных дуг: 1) $\sin^3\alpha$; 2) $\sin^4\alpha$; 3) $\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha.$

Преобразовать в произведение следующие выражения (задачи 794—805):

794. 1) $\sin 24^\circ+\sin 26^\circ$; 2) $\sin 5a-\sin 3a;$

3) $\sin(30^\circ + x) + \sin(30^\circ - x)$; 4) $\sin(60^\circ + y) - \sin(60^\circ - y)$.

795. 1) $\cos 23^\circ + \cos 43^\circ$; 2) $\cos 1 - \cos 5$;
3) $\cos(60^\circ + \beta) + \cos(60^\circ - \beta)$; 4) $\cos(30^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha)$.

796. 1) $\frac{\sin 35^\circ - \sin 25^\circ}{\sin 35^\circ + \sin 25^\circ}$; 2) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$;
3) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)}$.

797. 1) $\sin 17^\circ + \cos 29^\circ$; 2) $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$;
3) $\sin a - \cos b$; 4) $\cos\alpha + \sin\beta$; 5) $\sin x + \cos x$.

798. 1) $\sin 19^\circ + \sin 25^\circ + \sin 31^\circ$; 2) $\cos 2a + \cos 5a + \cos a$.

799. $\sin 27^\circ - \sin 1^\circ - \sin 17^\circ + \sin 11^\circ$.

800. 1) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 2) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$;
3) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$.

801. 1) $1 - \sin^2 x - \cos^2 y$; 2) $1 - \cos^2 x - \cos^2 y$.

802. 1) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 17^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 62^\circ - \operatorname{tg} 11^\circ$;
3) $\operatorname{tg}(42^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(48^\circ - \alpha)$;
4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

803. 1) $\operatorname{ctg} 112^\circ + \operatorname{ctg} 7^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 8^\circ - \operatorname{ctg} 49^\circ$;
3) $\operatorname{ctg}(A + B) - \operatorname{ctg}(A - C)$, если $B + C = 90^\circ$.

804. 1) $\operatorname{tg} 85^\circ + \operatorname{ctg} 85^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 75^\circ$;
3) $\operatorname{ctg}(\alpha + 45^\circ) - \operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ)$.

805. 1) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$; 2) $\operatorname{ctg}^2 a - \operatorname{ctg}^2 b$;
3) $\operatorname{tg}^2 15^\circ - \operatorname{ctg}^2 x$; 4) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y$.

Привести к виду, удобному для логарифмирования (задачи 806—820):

806. 1) $1 + \cos\alpha$; 2) $1 - \cos\alpha$;
3) $1 + \sin\alpha$; 4) $1 - \sin\alpha$;
5) $1 - 2\sin^2\alpha$; 6) $1 - 2\cos^2\alpha$.

807. 1) $1 \pm \operatorname{tg}\alpha$; 2) $1 \pm \operatorname{ctg}\alpha$.

808. 1) $\sin x + \operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{ctg} x + \cos x$;
3) $\sin x - \operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{ctg} x - \cos x$.

809. 1) $\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha$; 2) $\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\alpha - \sec\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha$;
5) $1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$; 6) $1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$.

810. 1) $1 + 2\cos\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha$;
3) $\sqrt{3} + 2\cos\alpha$; 4) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1$.

811. 1) $1-4\sin^2\alpha$; 2) $4\cos^2\alpha-3$;
3) $\sin^2 b-0{,}75$; 4) $\sqrt{2}\cos b-1$.

812. 1) $3-\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $1-3\operatorname{ctg}^2\alpha$.

813. 1) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$;
2) $\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$.

814. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\pm\sin\beta\cdot\cos\beta$.

815. $1+\sin\alpha+\cos\alpha$.

816. $1-\sin\alpha-\cos\alpha$.

817. $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$.

818. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

819. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$.

820. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$.

Доказать тождества (задачи 821—855):

821. $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ=\cos 5^\circ$. **822.** $\cos 12^\circ-\cos 48^\circ=\sin 18^\circ$.

823. $\sin 40^\circ+\cos 70^\circ=\cos 10^\circ$.

824. $\dfrac{\sin 56^\circ+\sin 34^\circ}{\sin 56^\circ-\sin 34^\circ}=\operatorname{ctg} 11^\circ$.

825. $\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

826. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

827. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta$.

828. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

829. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-1}=\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)$. **830.** $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sin 2\alpha$.

831. 1) $0{,}5+\cos 20^\circ=2\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ$;
2) $0{,}5\sqrt{3}-\cos 50^\circ=2\sin 10^\circ\cdot\sin 40^\circ$.

832. 1) $\sqrt{3}-2\sin 10^\circ=4\sin 25^\circ\cdot\cos 35^\circ$;
2) $\sqrt{2}+2\sin 15^\circ=2\cos 15^\circ$.

833. 1) $\cos^2\alpha-0{,}75=\sin(30^\circ+\alpha)\cdot\sin(30^\circ-\alpha)$;
2) $\sin^2\alpha-0{,}25=\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)$.

834. 1) $4\sin^2\alpha-3=4\sin(\alpha+60^\circ)\cdot\sin(\alpha-60^\circ)$;
2) $4\cos^2\alpha-1=4\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)$.

835. 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha-1=\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

836. $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$.

837. $\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$.

838. $\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}=2\cos\frac{\alpha}{2}$, если $0°<\alpha<90°$.

839. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$, если $0°<\alpha<90°$.

840. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cdot\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

841. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}$.

842. $\sin a-\sin 2a+\sin 3a=4\cos\frac{3a}{2}\cdot\cos a\cdot\sin\frac{a}{2}$.

843. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{5\alpha}{2}$.

844. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$.

845. $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}2{,}5\alpha$.

846. $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

847. $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{ctg}16\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$.

848. $8\cos 10°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°=\operatorname{ctg}10°$.

849. $16\sin 20°\cdot\sin 40°\cdot\sin 60°\cdot\sin 80°=3$.

850. $\operatorname{tg}20°\cdot\operatorname{tg}40°\cdot\operatorname{tg}60°\cdot\operatorname{tg}80°=3$.

851. $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 8\alpha\cdot\cos 16\alpha=\frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}$.

852. $\sin x\cdot\sin(x+60°)\cdot\sin(x+120°)\cdot\sin(x+180°)=$

$$=-\frac{1}{4}\sin x\cdot\sin 3x.$$

853. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha}=\operatorname{tg}n\alpha$.

854. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=$

$$=\frac{\sin 0{,}5\,n\alpha\cdot\sin 0{,}5\,(n+1)\alpha}{\sin 0{,}5\alpha}.$$

855. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=$

$$=\frac{\sin 0{,}5\,n\alpha\cdot\cos 0{,}5\,(n+1)\alpha}{\sin 0{,}5\,\alpha}.$$

Предполагая, что $A+B+C=180°$, доказать следующие тождества (задачи 856 — 864):

856. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$.

857. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$.

858. $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$.

859. $\sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos B \cdot \sin C = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

860. $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$.

861. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

862. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

863. $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$.

864. $\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}$.

865. Тангенсы двух углов треугольника равны соответственно 1,5 и 5. Найти третий угол треугольника.

866. Углы треугольника связаны соотношением:

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \cos(A - B) \cos C - \cos^2 C = \frac{1}{4}.$$

Определить угол C.

867. Преобразовать в произведение:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma, \text{ если } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

868. Представить в виде произведения $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma$, если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Привести к виду, удобному для логарифмирования при помощи вспомогательного угла (задачи 869—885):

869. $\frac{a - b}{a + b}$. **870.** $a^2 - b^2$, $|b| \leqslant |a|$.

871. $a^2 + b^2$.

872. $\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}$, $0 < b < a$.

873. $\sqrt{\frac{a + b}{a - b}} + \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$, $0 < b < a$.

874. $a \sin x + b \cos x$.

875. $a \sin \omega x + b \cos \omega x$.

876. $\sin x + \sqrt{3} \cos x$. **877.** $\sqrt{3} \sin x - \cos x$.

878. $4 \sin x - 3 \cos x$.

879. $3 \sin 20^\circ + 4 \cos 20^\circ$.

880. $2 \sin x - \sqrt{5} \cos x$.

881. $12 \sin 3x + 5 \cos 3x$.

882. $1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha$.

883. $8 \sin(45^\circ - A) + 15 \sin(45^\circ + A)$.

884. $\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$. **885.** $\frac{c - b \sin \alpha}{c + b \sin \alpha}$.

886. При каком значении x на отрезке от 0 до π нижеследующие функции имеют наибольшее значение:

1) $\sin x + \cos x$; 2) $\sin x - \cos x$; 3) $\sin x \cdot \cos x$.

Найти это наибольшее значение функции.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (задачи 887—892):

887. 1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{24}\right)$;

2) $y = \sin(ax + b_1) \cdot \cos(ax + b_2)$.

888. 1) $\cos\left(3x + \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(3x + \frac{3\pi}{5}\right)$;

2) $\cos(ax + b_1) \cdot \cos(ax + b_2)$.

889. $\sin(\omega x + \varphi_1) \cdot \sin(\omega x + \varphi_2)$.

890. 1) $\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x$;

2) $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x$.

891. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$.

892. $5\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x$.

893. Определить наименьшее положительное значение функции $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

894. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

895. Найти наибольшее значение суммы катетов прямоугольного треугольника, имеющего данную гипотенузу c.

896. Найти наименьшее значение площади прямоугольного треугольника, имеющего данную высоту h (опущенную на гипотенузу).

Решить уравнения (задачи 897—906):

897. $\cos x + \cos 2x = 0$. **898.** $\cos x = \cos 5x$.

899. $\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{15}\right) = 0$.

900. $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x$.

901. $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

902. $1 - \sin 5x = \left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)^2$.

903. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.

904. $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x$.

905. $\cos x \cdot \sin 7x = \cos 3x \cdot \sin 5x$.

906. $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2 x = 0$.

ГЛАВА IV

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 14. Таблицы логарифмов тригонометрических функций

Найти по таблицам:

907. 1) $\lg \sin 30°$; 2) $\lg \sin 78°$; 3) $\lg \sin 20°12'$;
4) $\lg \sin 72°48'$; 5) $\lg \sin 50°18'$; 6) $\lg \sin 50°20'$;
7) $\lg \sin 45°29'$; 8) $\lg \sin 14°51'$; 9) $\lg \sin 11°20'$;
10) $\lg \sin 11°23'$; 11) $\lg \sin 9°06'$; 12) $\lg \sin 5°44'$;
13) $\lg \sin 5°45'$; 14) $\lg \sin 0°38'$.

908. 1) $\lg \cos 15°12'$; 2) $\lg \cos 75°42'$; 3) $\lg \cos 40°24'$;
4) $\lg \cos 40°25'$; 5) $\lg \cos 62°35'$; 6) $\lg \cos 73°33'$;
7) $\lg \cos 80°35'$; 8) $\lg \cos 84°13'$; 9) $\lg \cos 89°20'$;
10) $\lg \cos 89°26'$.

909. 1) $\lg \operatorname{tg} 20°42'$; 2) $\lg \operatorname{tg} 63°12'$; 3) $\lg \operatorname{tg} 30°32'$;
4) $\lg \operatorname{tg} 55°40'$; 5) $\lg \operatorname{tg} 41°17'$; 6) $\lg \operatorname{tg} 84°18'$;
7) $\lg \operatorname{tg} 5°48'$; 8) $\lg \operatorname{tg} 45°$.

910. 1) $\lg \operatorname{ctg} 35°24'$; 2) $\lg \operatorname{ctg} 35°25'$; 3) $\lg \operatorname{ctg} 26°38'$;
4) $\lg \operatorname{ctg} 75°47'$; 5) $\lg \operatorname{ctg} 86°23'$; 6) $\lg \operatorname{ctg} 84°13'$;
7) $\lg \operatorname{ctg} 0°34'$; 8) $\lg \operatorname{ctg} 45°$.

Найти острый угол x, если дано:

911. $\lg \sin x =$ 1) $\bar{1},6259$; 2) $\bar{1},7795$; 3) $\bar{1},8868$;
4) $\bar{1},9777$; 5) $\bar{1},4350$; 6) $\bar{1},4359$;
7) $\bar{1},8377$; 8) $\bar{1},9703$; 9) $\bar{1},1157$;
10) $\bar{1},3040$; 11) $\bar{2},4414$; 12) $\bar{1},0021$;
13) $\bar{2},9477$; 14) $\bar{3},8700$; 15) $\bar{1},9999$.

912. $\lg \cos x =$ 1) $\bar{1},8081$; 2) $\bar{1},8830$; 3) $\bar{1},8855$;
4) $\bar{1},8817$; 5) $\bar{1},8815$; 6) $\bar{1},6332$;
7) $\bar{1},3947$; 8) $\bar{1},7643$; 9) $\bar{1},3331$;
10) $\bar{1},3810$; 11) $\bar{1},0046$; 12) $\bar{2},8720$.

913. $\lg \operatorname{tg} x =$ 1) $\bar{1},9924$; 2) $0,3333$; 3) $0,1615$;
4) $\bar{1},7520$; 5) $\bar{1},4139$; 6) $2,9211$;
7) $\bar{2},8130$; 8) $1,0008$; 9) $1,6750$.

914. $\lg \operatorname{ctg} x =$ 1) $\bar{1},9238$; 2) $0,1467$; 3) $0,1462$;
4) $\bar{1},4016$; 5) $0,3869$; 6) $\bar{1},6990$;
7) $\bar{1},3318$; 8) $\bar{1},0055$; 9) $2,3333$.

Пользуясь таблицами логарифмов, найти наименьший по абсолютной величине угол x, если дано:

915. $\sin x = \frac{4S}{\pi Q}$ при $S = 5,15$ и $Q = 8,04$.

916. $\sin x = 1 - \cos^2 \alpha$ при $\alpha = 63°17'$.

917. $\cos x = \sqrt{2}\sec^2 \alpha - \sqrt{2}$ при $\alpha = 18°20'$.

918. $\operatorname{tg} x = \pi(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2$ при $\alpha = 40°32'$.

919. $\operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 \alpha}{\pi\sqrt{3}}$ при $\alpha = 60°21'$.

Вычислить с помощью таблиц логарифмов следующие выражения:

920. $V = \frac{2}{3} a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ при $a = 2{,}56$ и $\alpha = 54°30'$.

921. $T = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{\cos^2 \alpha} \sin(\alpha + 30°) \cdot \sin(\alpha - 30°)$ при $h = 0{,}28$ и $\alpha = 41°$.

922. $S = \frac{a^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$ при $a = 208{,}3$; $\alpha = 78°15'$; $\beta = 43°22'$.

923. $V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$ при $a = 3{,}06$; $b = 15{,}20$; $c = 12{,}40$; $\alpha = 62°50'$.

924. $V = \frac{1}{12} \cdot \frac{m^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^3}$ при $m = 20{,}1$; $\alpha = 32°10'$.

925. $R = \frac{r}{\sin \alpha}\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$ при $r = 12{,}56$; $\alpha = 26°26'$.

926. $H = \frac{1}{3} d(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha)^2$ при $d = 6{,}178$; $\alpha = 30°15'$; $\beta = 20°28'$.

927. $V = 8m^3 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ при $m = 12{,}5$; $\alpha = 20°20'$.

928. $V = 2R^3(1 - \sin \alpha) \cdot \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$ при $R = 0{,}72$ $\alpha = 72°$.

929. $V = d^3 \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha \sqrt{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}$ при $d = 10{,}6$; $\alpha = 50°10'$.

930. $T = 3b^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}}$ при $b = 8{,}73$; $\alpha = 62°30'$.

931. $V = \frac{1}{2} b^3 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \beta - 1}$ при $b = 2{,}8$; $\alpha = 50°$; $\beta = 42°$

932. $S = a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}}$ при $a = 5{,}73$; $\alpha = 47°20'$; $\beta = 20°40'$.

933. $S = l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}$ при $l = 10{,}29$; $\alpha = 40°54'$; $\beta = 36°26'$.

934. $S = 4R^2 \sin \beta \cdot (\cos \beta + \sin \beta + 1)$ при $R = 2{,}05$; $\beta = 35°20'$

935. $S=\frac{H^2}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}(\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\beta+\cos\alpha)$ при $H=3{,}7$; $\alpha=25°$; $\beta=20°$.

936. $S=\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\beta\left(1+\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$ при $\alpha=50{,}27$; $\alpha=20°15'$; $\beta=61°12'$.

937. $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right)$ при $a=5{,}08$; $\alpha=50°10'$; $\beta=25°20'$.

938. $S=\frac{\pi a^2\left(1+\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$ при $a=7{,}33$; $\alpha=33°40'$.

939. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi a^3}{(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)^2}$ при $a=13{,}65$; $B=50°18'$; $C=70°24'$.

940. $S=2\pi b^2\operatorname{tg}\alpha\cdot(\cos\alpha+1-2\cos^2\alpha)$ при $b=10{,}08$; $\alpha=62°44'$.

941. $l=2R\sqrt{1-\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}$ при $R=68{,}05$; $\alpha=51°19'$.

942. $V=\frac{\pi l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{9\sqrt{3}}\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$ при $l=20{,}3$; $\alpha=40°30'$.

§ 15. Решение прямоугольных треугольников с применением таблиц логарифмов*

943. Выразить площадь прямоугольного треугольника через: 1) катет и прилежащий к нему острый угол; 2) катет и противолежащий угол; 3) гипотенузу и острый угол.

Решить прямоугольный треугольник, если даны:

I. Катет и острый угол:

944. $a=30{,}01$ *м*; $A=80°24'$. **945.** $a=9{,}084$ *м*; $B=35°05'$.
946. $b=72{,}3$ *см*; $A=7°20'$. **947.** $b=91{,}14$ *дм*; $B=31°15'$.

II. Гипотенуза и острый угол:

948. $c=0{,}24$ *м*; $A=58°$. **949.** $c=10{,}7$ *дм*; $A=29°50'$.
950. $c=538$ *см*; $B=42°30'$. **951.** $c=80{,}35$ *м*; $B=38°19'$.

III. Гипотенуза и катет:

952. $c=2{,}6$ *дм*; $a=1{,}8$ *дм*. **953.** $c=131{,}4$ *м*; $a=90{,}6$ *м*.
954. $c=9{,}0$ *см*; $b=4{,}5$ *см*. **955.** $c=0{,}838$ *м*; $b=0{,}295$ *м*.

IV. Оба катета:

956. $a=60{,}3$ *см*; $b=48{,}7$ *см*. **957.** $a=18{,}04$ *м*; $b=20{,}22$ *м*.

---

* Обозначения те же, что и в § 3.

958. $a = 95{,}5$ *см*; $b = 1{,}08$ *м*. **959.** $a = 9{,}24$ *дм*; $b = 8{,}42$ *дм*.

Решить равнобедренный треугольник по следующим данным (*обозначения*: a и c — равные стороны треугольника):

960. $a = 32$ *см*; $A = 32°$. **961.** $a = 30{,}5$ *см*; $B = 98°50'$.

962. $b = 6{,}1$ *м*; $A = 47°$. **963.** $b = 72{,}9$ *м*; $c = 80{,}3$ *м*.

964. $c = 8$ *см*; $S = 25$ *см*^{2}. **965.** $S = 48{,}5$ *см*^{2}; $B = 67°44'$.

966. Решить прямоугольный треугольник, зная его угол $A = 32°20'$ и биссектрису этого угла $l = 0{,}423$.

967. Решить прямоугольный треугольник по его периметру $2p = 123{,}6$ и углу $A = 41°38'$.

968. Решить прямоугольный треугольник, зная разность его катетов $m = 12{,}51$ и угол $B = 26°14'$.

ГЛАВА V

ПРИЛОЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 16. Приложения тригонометрии к решению и исследованию геометрических задач

ПЛАНИМЕТРИЯ

Правильные многоугольники

969. Определить сторону правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R.

970. Дана окружность радиуса R. Найти апофему k_n правильного n-угольника, вписанного в окружность. Пользуясь тригонометрией, выяснить, к какой постоянной величине стремится последовательность апофем k_n при неограниченном возрастании n. Вычислить величину отношения $k_n : R$ при некоторых значениях n и заполнить таблицу:

n	3	6	18	20	30	60	90
$180° : n$							
$k_n : R$							

971. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник и вокруг неё описан правильный n-угольник. 1) Выразить периметры p_n и P_n этих многоугольников через R и n. 2) На основании выведенных формул доказать, что при неограниченном возрастании n последовательности периметров p_n и P_n стремятся к одному и тому же пределу. 3) Зная, что $(\sin \alpha) : \alpha$, при $\alpha \to 0$, стремится к 1, выяснить, к какой постоянной вели-

чине стремятся периметры p_n и P_n правильных вписанного и описанного многоугольников при неограниченном возрастании n.
4) Заполняя следующую таблицу, проследить за изменением отношений $p_n : 2R$ и $P_n : 2R$ с изменением n:

n	3	4	6	12	15	18	20	30	60	90
$180° : n$										
$p_n : 2R$										
$P_n : 2R$										

972. Дана окружность радиуса R. Определить: 1) площадь s_n правильного n-угольника, вписанного в окружность; 2) площадь S_n правильного n-угольника, описанного около окружности. Пользуясь выведенными формулами, доказать, что при неограниченном возрастании n последовательности площадей s_n и S_n стремятся к одному и тому же пределу; найти этот предел. Составить таблицу значений отношений $s_n : R^2$ и $S_n : R^2$ для частных значений n (как в предыдущей задаче).

973. Определить площадь правильного n-угольника, если его периметр равен P.

974. Около правильного n-угольника со стороной a описана окружность и в него вписана окружность. Определить ширину кольца между этими окружностями.

975. Середины сторон правильного n-угольника соединены прямыми, образующими новый правильный n-угольник, вписанный в данный. Найти отношение площади вписанного n-угольника к площади данного n-угольника. При каком значении n площадь вписанного многоугольника составляет: 1) половину площади данного многоугольника; 2) 0,75 площади данного многоугольника?

976. В окружность вписан правильный $2n$-угольник, вокруг этой же окружности описан правильный n-угольник. Площади этих многоугольников отличаются друг от друга на q. Определить радиус окружности.

977. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат так, что одна из его сторон образует со стороной данного квадрата угол α. Определить площадь вписанного квадрата. Решение исследовать*.

---

* т. е. 1) определить границы возможного изменения углового параметра; 2) выяснить, как изменяется полученный ответ при том или ином изменении угла, в частности установить, имеет ли искомая величина наибольшее или наименьшее значение, каковы эти значения и когда (т. е. при каких значениях углового параметра) они достигаются; 3) проверить геометрически сделанные выводы.

Длина окружности и площадь круга

978. Угол α, вписанный в окружность, опирается на хорду, длина которой a. Найти длину окружности.

979. В окружность, длина которой равна C, вписан треугольник с углами α и β. Определить стороны треугольника.

980. Определить длину окружности, описанной около треугольника, два угла которого α и β, а высота, опущенная из вершины третьего угла, равна h.

981. Расстояние между центрами двух окружностей равно d. Общая внутренняя касательная их составляет с линией центров угол, равный α, а общая внешняя касательная составляет с линией центров угол β. Определить длину этих окружностей.

982. Определить площадь равнобедренной трапеции с острым углом α, если длина окружности, вписанной в эту трапецию, равна C. При каком значении α площадь трапеции равна удвоенной площади круга?

983. Определить длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника с острым углом α и площадью S. При каком значении угла α длина окружности будет наименьшей?

984. Высота сегмента равна h, основание равно b. Определить дугу сегмента. Вычислить дугу сегмента при $h=b$.

985. AB — дуга некоторой окружности, α — соответствующий ей центральный угол. Определить длину окружности, вписанной в сектор AOB, если радиус данной окружности равен R. При каком значении α длина вписанной окружности составляет третью часть длины данной окружности?

986. В прямоугольной трапеции острый угол равен α, а длина вписанной в неё окружности равна C. Определить площадь трапеции. Решение исследовать.

987. Найти площадь круга, если известно, что его хорда a стягивает дугу, содержащую α радианов. Решение исследовать.

988. Определить площадь ромба с углом α, зная площадь q вписанного в него круга. Решение исследовать.

989. Определить угол ромба, зная его площадь Q и площадь вписанного в него круга q.

990. Определить площади каждого из двух внешне касающихся кругов, если расстояние между их центрами равно d, а угол между общими внешними касательными равен φ. Решение исследовать.

991. Около круга описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большей из параллельных сторон острые углы α и β. Определить площадь круга, если площадь трапеции равна Q.

992. Радиус сектора равен R, радианная мера дуги, ограничивающей этот сектор, равна 2α. Определить площадь круга, вписанного в сектор. Решение исследовать.

993. Определить площадь сегмента, зная его радиус R и радианную меру дуги α.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Перпендикуляр и наклонные к плоскости. Угол между прямой и плоскостью

994. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведена наклонная под углом α к плоскости. Определить длину наклонной и её проекцию на плоскость.

995. В плоскости P описана окружность, длина которой равна C; из центра O окружности восставлен к плоскости перпендикуляр $OA = h$. Определить угол φ между этим перпендикуляром и прямой, соединяющей его вершину A с произвольной точкой M окружности.

996. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно b, пересечены прямой, образующей с ними угол α. Определить длину отрезка прямой, заключённого между данными плоскостями.

997. Отрезки b и $2b$ упираются своими концами в две параллельные плоскости. Найти проекцию первого отрезка на одну из данных плоскостей, если второй отрезок образует с этой плоскостью угол β. При каких значениях угла β задача имеет решение?

998. Из некоторой точки проведены к данной плоскости две наклонные, равные каждая a; угол между наклонными равен α, а угол между их проекциями — прямой. Найти: 1) расстояние данной точки от плоскости; 2) границы возможного изменения угла α.

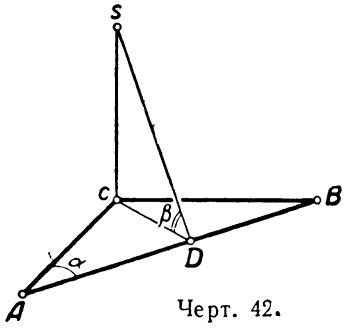
999. Из точки A проведены к плоскости две равные наклонные AB и AC. Отрезок BC, соединяющий основания наклонных, равен a. Угол, образуемый наклонной AB с отрезком BC, равен α; угол, образуемый отрезком BC с проекцией наклонной AC, равен β. Определить расстояние от точки A до плоскости.

1000. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна d и образует с прилежащей стороной основания угол α. Определить высоту параллелепипеда. При каких значениях угла α задача имеет решение?

1001. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует со стороной основания угол α. Найти угол φ между боковым ребром и высотой пирамиды. При каких значениях угла α задача имеет решение?

1002. Катет прямоугольного треугольника ABC равен b, прилежащий к нему угол равен α. Из вершины C прямого

угла восставлен к плоскости этого треугольника перпендикуляр CS; из точки S проведён перпендикуляр SD к гипотенузе AB, образующий с плоскостью треугольника угол β (черт. 42). Определить длину перпендикуляра CS.



Черт. 42.

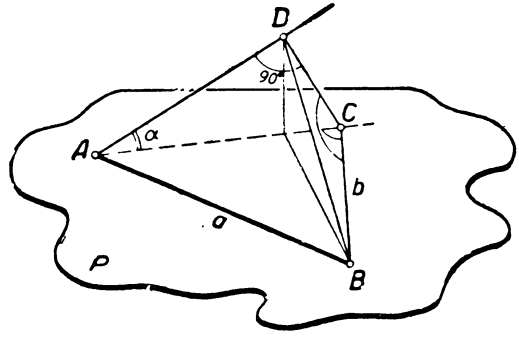
1003. Вне плоскости треугольника ABC дана точка M, удалённая от каждой из его вершин на расстояние a. Прямая, соединяющая точку M с одной из вершин треугольника, образует с плоскостью треугольника угол α. Определить площадь круга, описанного около данного треугольника.

1004. Точка M лежит вне плоскости треугольника и удалена от каждой стороны треугольника на расстояние l. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно к одной из сторон треугольника, образует с его плоскостью угол β. Определить длину окружности, вписанной в данный треугольник.

1005. Доказать, что диагональ куба одинаково наклонена ко всем его граням и что тангенс угла наклона равен $\sin 45°$.

1006. Если диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя его гранями равные углы α, а с третьей гранью угол γ, то $\sin\gamma = \sqrt{\cos 2\alpha}$. Доказать.

1007. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонная, образующая с плоскостью угол α; через основание наклонной проведена в плоскости прямая под углом β ($\beta \leqslant 90°$) к проекции наклонной. Определить угол φ, образуемый этой прямой с наклонной. Используя полученное соотношение, доказать: 1) теорему о трёх перпендикулярах; 2) что острый угол, составленный наклонной с её проекцией на плоскость, есть наименьший из всех углов, которые наклонная образует с прямыми, проведёнными на плоскости через её основание.



Черт. 43.

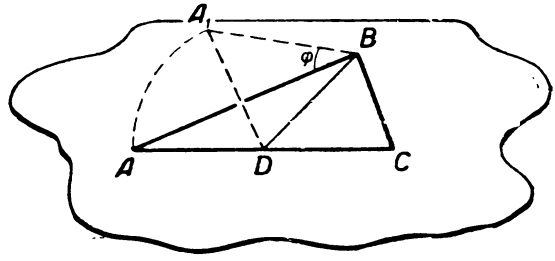
1008. Отрезок, длина которого равна a, лежит в плоскости P. Из одного конца его проведена наклонная под углом α к плоскости. Найти расстояние BD между другим концом отрезка и наклонной, если расстояние этого конца от проекции наклонной равно b (черт. 43). Решение исследовать.

Угол между двумя плоскостями

1009. Двугранный угол равен α ($\alpha < 90°$). На одной грани его дана точка, отстоящая от ребра двугранного угла на расстоянии a. Найти расстояние этой точки от другой грани.

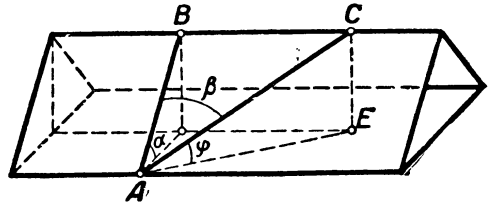
1010. Точка M лежит во внутренней области прямого двугранного угла, точка A—на его ребре. Найти длину отрезка AM, зная расстояние a точки M от граней двугранного угла и угол α наклона отрезка AM к ребру двугранного угла. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка AM при постоянном значении a?

1011. Равносторонний треугольник со стороной a расположен над плоскостью так, что две его вершины находятся на расстоянии b от плоскости, а третья вершина — на расстоянии c ($c > b$). Найти угол φ между плоскостью треугольника и данной плоскостью. Вычислить угол φ при $a=4$, $b=3$, $c=6$.



Черт. 44.

1012. Треугольник ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = \alpha$, перегнут по высоте BD так, что плоскости ABD и CBD образовали двугранный угол α. Определить угол φ поворота стороны AB (черт. 44). При каком значении α угол поворота φ будет равен 60°?



Черт. 45.

1013. На крыше, имеющей наклон α к горизонту, проведена прямая AC под углом β к линии наибольшего ската* крыши (черт. 45). Найти угол φ наклона прямой AC к горизонту.

1014. Отрезок прямой упирается своими концами в грани прямого двугранного угла, образуя с каждой из них угол α. Найти угол между этим отрезком и ребром двугранного угла. Исследовать решение.

1015. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две боковые грани её по прямым, составляющим между собой угол α. Определить угол наклона этой плоскости к основанию призмы. При каких значениях угла α задача имеет решение?

---

* Линией наибольшего ската называют прямую, лежащую в плоскости крыши перпендикулярно к её горизонтальному коньку.

1016. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол при основании пирамиды. При каких значениях угла α задача имеет решение?

1017. Треугольник спроектирован на плоскость. Доказать, что площадь проекции треугольника равна площади проектируемого треугольника, умноженной на косинус угла, образуемого плоскостью треугольника и плоскостью его проекции. Как применить эту теорему для вычисления поверхности крыши строения, если все скаты крыши наклонены к горизонту под одним и тем же углом?

1018. Трёхгранный угол $SABC$, плоские углы которого равны α, β и γ, пересечён плоскостью ABC так, что $SA=SB=SC=m$. Найти углы, образуемые плоскостью сечения с плоскостями граней трёхгранного угла, зная, что рёбра трёхгранного угла образуют с секущей плоскостью углы, равные φ. Исследовать решение.

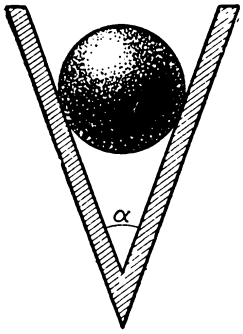
1019. Каждый плоский угол трёхгранного угла равен α. Найти двугранный угол трёхгранного угла. Исследовать решение.

1020. Каждый из двугранных углов трёхгранного угла равен α. Найти плоские углы трёхгранного угла.

1021. Плоские углы трёхгранного угла равны α, β и γ. Определить: 1) двугранные углы трёхгранного угла; 2) угол между ребром трёхгранного угла и противолежащей гранью.

§ 17. Некоторые другие приложения тригонометрии

1022. Шар весом P лежит в жёлобе (черт. 46). Определить силу давления шара на стенки жёлоба.



Черт. 46.

1023. Определить равнодействующую R двух сил P и Q, приложенных к телу, если угол между направлениями этих сил φ. Исследовать решение.

1024. Диаметр винта D, а шаг винта (высота одного витка) h. Найти угол α подъёма винта.

1025. Поезд движется равномерно со скоростью v_1, а капли дождя, падающие вертикально со скоростью v_2, оставляют следы на окнах вагонов. Определить угол, образованный следом капли с вертикалью. Вычислить угол при $v_1 = 36$ *км/час* и $v_2 = 8$ *м/сек*.

1026. Самолёт, обладающий в безветрии скоростью v_1, летит при ветре, дующем с востока со скоростью v_2. Каково должно быть направление продольной оси самолёта, чтобы он летел строго на север?

1027. Деревянный брусок весом P сползает без трения с плоскости, наклонённой к горизонту под углом φ. Определить скорость движения бруска по наклонной плоскости через t минут после начала движения.

1028. Велосипедист едет по закруглению трека со скоростью v *м/сек*. Радиус закругления равен R. Найти поперечный наклон, который следует придать дорожке трека, чтобы велосипедист не подвергался смещению поперёк дорожки. Вычислить при $v = 10$ *м/сек*, $R = 20$ *м*.

1029. Прямая линия на плоскости определяется уравнением $y = ax + b$, где a и b — действительные числа. Какой геометрический смысл имеет число a?

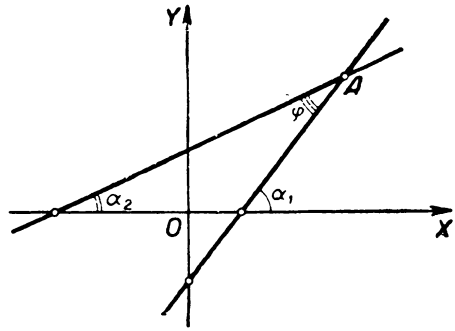
1030. Две прямые заданы своими уравнениями:

$$y = a_1 x + b_1, \tag{1}$$

$$y = a_2 x + b_2. \tag{2}$$

1) Найти угол φ между ними.

2) При каком соотношении между параметрами a_1 и a_2 прямые (1) и (2) взаимно перпендикулярны (условие перпендикулярности двух прямых) (черт. 47)?



Черт. 47.

1031. Простое гармоническое колебательное движение точки выражается функцией

$$S = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где S — расстояние движущейся по прямой линии точки от положения равновесия; постоянная величина A (амплитуда колебания) выражает размах колебания; постоянная величина ω характеризует частоту колебания; t — время, прошедшее с начала движения, φ_0 называется начальной фазой. 1) Показать, что число $T = \frac{2\pi}{\omega}$ является периодом функции $A\sin(\omega t + \varphi_0)$. 2) Какой физический смысл имеет это число? 3) Какой физический смысл имеет число, обратное T?

1032. Найти период и частоту гармонического колебания $y = \sin \omega t$.

1033. Даны три простых гармонических колебания:

$$y = \sin\frac{x}{2};\ y = 2\sin\frac{x}{2};\ y = 4\sin\frac{x}{2}.$$

1) Какой период имеет каждое из этих колебаний? 2) Чем отличаются друг от друга эти колебания:

1034. Даны три простых гармонических колебания;

$$y = 3\sin x;\ y = 3\sin 2x;\ y = 3\sin 4x.$$

Какой период и амплитуду имеет каждое из этих колебаний?

1035. Чем отличаются друг от друга гармонические колебания:

1) $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $y = 0{,}5\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$?

1036. Какие амплитуду, период, частоту и начальную фазу имеют следующие гармонические колебания:

1) $y = 2\sin 3x$; 2) $y = 5\cos 2x$; 3) $y = 4\sin \pi x$;

4) $y = 2\sin\frac{x}{2}$; 5) $y = 2\sin(3x + 5)$; 6) $y = \frac{1}{3}\sin 2\pi(x - 3)$?

1037. По данным двум простым гармоническим колебаниям найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания:

1) $s_1 = 3\sin 2t$ и $s_2 = 2\sin 2t$;

2) $s_1 = 2\sin\frac{t}{2}$ и $s_2 = 2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $s_1 = 4\sin 5t$ и $s_2 = 3\cos 5t$;

4) $s_1 = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ и $s_2 = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.

ГЛАВА VI

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ И УГЛУБЛЕНИЯ ПРОЙДЕННОГО МАТЕРИАЛА*

§ 18. Тригонометрические функции

1038. Может ли быть отрицательной дробь:

$$1)\ \frac{\cos x}{\sec x}?\quad 2)\ \frac{1-\sin x}{\sin x}?$$

1039. В каких четвертях справедливы неравенства:

1) $\sin x \cdot \cos x > 0$; 2) $\sec x \cdot \operatorname{cosec} x < 0$; 3) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x < 0$;
4) $\sec x \cdot \operatorname{tg} x > 0$; 5) $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x > 0$?

1040. Верно ли равенство: $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 3{,}2$?

1041. (Устно.) Вычислить:

$\lg \sin 30° \cdot \lg \sin 45° \cdot \lg \sin 60° \cdot \lg \sin 75° \cdot \lg \sin 90° \cdot \lg \sin 120°$.

1042. Определить границы изменения следующих функций:

1) $\sin(\sin x)$; 2) $\sin(\cos x)$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)$;
4) $\cos(\sin x)$; 5) $\sec(\operatorname{tg} x)$; 6) $\operatorname{tg}(\sec x)$;
7) $\sin x + \cos x$; 8) $\sin x \cdot \cos x$,

при изменении угла x от $-\infty$ до $+\infty$.

1043. В каких границах (в пределе одной окружности) может изменяться аргумент x в каждом из неравенств:

1) $\sin x - 0{,}5 \geqslant 0$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \leqslant 0$; 3) $\sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3} \geqslant 0$;
4) $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 0$; 5) $\frac{1}{2} - \cos x \geqslant 0$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \geqslant 0$;
7) $1 - \operatorname{tg} x \geqslant 0$; 8) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \leqslant 0$; 9) $\operatorname{ctg} x - \frac{\sqrt{3}}{3} \geqslant 0$;
10) $2 - \sec x \leqslant 0$.

1044. Для каких значений x определена функция $y = \frac{1}{1+\sin x}$? Найти наименьшее значение этой функции и указать, при каких значениях x оно достигается.

---

*Решать в X классе с начала учебного года параллельно с изучением нового материала.

1045. Найти область определения функции $y=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$. Какие действительные значения принимает эта функция?

1046. Найти область определения функций:

1) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$; 2) $y=\sin\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\cos x+\operatorname{tg} x$;

4) $y=\sqrt{1-\sin x}$; 5) $y=\sqrt{1+\cos x}$.

1047. При каких значениях x на отрезке от 0 до 2π имеют смысл выражения:

1) $\sqrt{\sin x}$? 2) $\sqrt{\sin 2x}$? 3) $\sqrt{1-\cos x}$?

4) $\sqrt{\frac{1}{2}-\sin x}$? 5) $\sqrt{\frac{1}{2}+\cos x}$? 6) $\sqrt{1-\operatorname{tg} x}$?

1048. Найти область определения функций:

1) $y=\frac{x}{\sin x}$; 2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$.

1049. Найти область определения функций:

1) $y=\lg\sin x$; 2) $y=\sqrt{\lg\cos x}$; 3) $y=\sqrt{\log_a\sin x}$.

1050. Найти область определения функций:

1) $y=\sin x\cdot\operatorname{cosec} x$; 2) $y=\cos x\cdot\sec x$; 3) $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

Какие значения принимает каждая из этих функций?

1051. Найти область определения функции $y=\frac{\cos x}{\sec x}$. Для каких значений аргумента x эта функция положительна? отрицательна? обращается в нуль? Может ли эта функция принимать значения, превосходящие 1?

1052. Определить период функций:

1) $y=\sin 2\pi x$; 2) $y=\cos\frac{x}{4}$;

3) $y=\operatorname{tg} 3x+2\operatorname{ctg} 2x$; 4) $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}$;

5) $y=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^3\frac{x}{2}$.

1053. В чём состоит свойство полупериодичности тригонометрических функций?

1054. Указать, какие из нижеследующих функций являются чётными, нечётными и какие не являются ни чётными ни нечётными:

1) $y=\frac{x}{\sin x}$; 2) $y=\sin^2 x$;

3) $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$; 4) $y=\frac{\cos x}{\sin x+\operatorname{tg} x}$;

5) $y = \sin(\sin x) + \cos(\cos x)$; 6) $y = \frac{1 + \sin(\cos x)}{1 + \cos(\sin x)}$.

1055. Изменится ли знак функции, если поменять местами x и y:

1) $\sin(x-y)$? 2) $\cos(x-y)$? 3) $\operatorname{tg}(x-y)$?

1056. Как изменяются функции: 1) $y=\lg\sin x$ и 2) $y=\lg\cos x$ при возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$?

1057. Как изменяются функции: 1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=1-\cos x$ при возрастании x от 0 до 2π? При каких значениях x в промежутке от 0 до 2π эти функции принимают наибольшее и наименьшее значения? Вычислить эти значения.

1058. Имеет ли каждая из следующих функций наибольшее значение и каково это значение:

1) $1+\sin x$; 2) $1-\sin x$; 3) $1+\operatorname{tg} x$; 4) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$?

1059. Найти наименьшее значение функции $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2$.

1060. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^{\cos x}$.

1061. При каких значениях x в промежутке от 0 до 2π функция: 1) $y=\sin(\cos x)$, 2) $y=\operatorname{tg}(\sin x)$ принимает наибольшее значение и при каких наименьшее? Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций, найти эти значения функции.

1062. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$$y = 3\sin^2 x - 5\sin x\cdot\cos x - 8\cos^2 x.$$

В задачах 1063 — 1067 исследовать функции и построить их графики. При исследовании: 1) найти область определения функции; 2) установить, имеет ли график функции ось или центр симметрии; 3) найти её наибольшее и наименьшее значения; 4) определить период функции.

1063. $y = 2\sin 2x$. **1064.** $y = -\sin\frac{x}{2}$.

1065. $y = \sin 4x + \cos 4x$. **1066.** $y = \sin|x|$.

1067. $y = |\sin x|$.

§ 19. Преобразование тригонометрических выражений

1068. (Устно.) Вычислить $\lg(\operatorname{tg} 40^\circ\cdot\operatorname{tg} 41^\circ\cdot\operatorname{tg} 42^\circ\ldots\operatorname{tg} 50^\circ)$.

1069. Вычислить $\cos A\cdot\operatorname{cosec} A\cdot\sqrt{\sec^2 A - 1}$, $\frac{\pi}{2} < A < \pi$.

1070. Упростить $\frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 A + 1}}$.

1071. $\sin\alpha = \sqrt{1-a^4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; вычислить $\cos\alpha$. Каким должно быть число a?

1072. $\cos\alpha = \sqrt{1+a}$, $\frac{3}{2}\pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$; вычислить $\sin\alpha$. Каким должно быть число a?

1073. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{a^2-1}$, $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$; вычислить $\sec\alpha$. Каким должно быть число a?

1074. Дробь $\frac{\sin^4\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - \sec^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ выразить только через $\sin\alpha$.

1075. Выразить через $\cos\alpha$ сумму

$$\frac{1}{\sec^2\alpha} - \sin^4\alpha - 0{,}25\cdot\sin^2 2\alpha + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}.$$

1076. Выразить через $\operatorname{cosec}\alpha$ сумму

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2}} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

1077. Доказать, что дробь $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ не может быть отрицательным числом.

1078. Показать, что величина выражения

$$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

не зависит от величины угла β.

1079. Доказать тождество $\frac{\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\sec\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$.

1080. Доказать тождество $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x\cdot\operatorname{cosec}^2 x$.

1081. Доказать, что $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

1082. Доказать, что $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

1083. Зная, что $\sin\alpha = A\sin\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha = B\operatorname{tg}\beta$, выразить $\cos\alpha$ и $\sin\beta$ через A и B.

1084. Вычислить (без таблиц) $2\operatorname{tg}1095^\circ + \operatorname{ctg}975^\circ - \operatorname{tg}195^\circ$.

1085. Упростить выражение

$$\sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A\cdot\sin B\cdot\cos(A+B).$$

1086. Упростить $\sin(\pi n+\alpha)\cdot\cos(\pi n-\alpha)$.

1087. Вычислить $\sin(\pi n+1)\cdot\cos[\pi(n+1)+1]$.

1088. Упростить $\frac{\sin^2(\pi n-\alpha)\cdot\cos^2(\pi n+\alpha)}{\cos^2[(2n+1)\pi-\alpha]}$.

1089. Вычислить (без таблиц) $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$.

1090. Доказать, что $\operatorname{tg}10^\circ\cdot\operatorname{tg}50^\circ\cdot\operatorname{tg}70^\circ = \operatorname{tg}30^\circ$.

1091. Доказать тождество $\frac{4\sin\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\sec\alpha}=\sin 4\alpha$.

1092. Доказать тождество $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$.

1093. Доказать тождество $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha$.

1094. Упростить $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

1095. Вычислить (без таблиц) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$.

1096. Выразить $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$, считая, что

$$270^\circ\leqslant\alpha\leqslant 450^\circ.$$

1097. Упростить $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Доказать тождества (задачи 1098 — 1106):

1098. $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$.

1099. $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

1100. $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2\operatorname{tg}\alpha,\ \frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$.

1101. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.

1102. $\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1$.

1103. $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

1104. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

1105. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\operatorname{ctg}x=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$.

1106. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

1107. Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

1108. Упростить:

$$\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ.$$

Привести к виду, удобному для логарифмирования (задачи 1109 — 1120):

1109. $2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

1110. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{cosec} 2\alpha$.

1111. $\frac{1+\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}$. **1112.** $1 + \operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha$.

1113. $1 + \cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}$. **1114.** $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

1115. $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$.

1116. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1117. $1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha - \sin^2\beta - \cos^4\alpha$.

1118. $\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$. **1119.** $2 + \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha$.

1120. $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg} 2\alpha + 4\operatorname{tg} 4\alpha + \ldots + 2^{n-1}\operatorname{tg} 2^{n-1}\alpha + 2^n \operatorname{ctg} 2^n\alpha$.

1121. В треугольнике углы удовлетворяют соотношению

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}.$$

Определить угол A.

1122. Доказать, что $\operatorname{tg}^2 20°$, $\operatorname{tg}^2 40°$, $\operatorname{tg}^2 80°$ являются корнями уравнения $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$.

1123. Доказать методом математической индукции, что

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

§ 20. Вычисление числовых значений тригонометрических выражений при помощи математических таблиц

Вычислить при помощи математических таблиц выражения:

1124. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)$ при $a = 8{,}74$; $\alpha = 48°20'$.

1125. $S = h^2 \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{\sin\alpha + 1}{\sin\alpha}$ при $h = 24{,}15$; $\alpha = 53°46'$.

1126. $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha$ при $R = 8{,}056$; $\alpha = 47°12'$.

1127. $V = \frac{\pi}{2} d^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}(1 + 2\sin\alpha)$ при $d = 2{,}607$; $\alpha = 27°49'$.

1128. $T = 2\pi R^2 \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$ при $R = 248{,}6$; $\alpha = 63°24'$.

1129. $H = 2\sqrt{S}\sin^3\frac{\alpha}{2}(1 + \cos\alpha)$ при $S = 9{,}999$; $\alpha = 44°44'$.

1130. $S = \frac{4d^2 \operatorname{tg}(\alpha - 45°)\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$ при $d = 1{,}137$; $\alpha = 39°15'$.

1131. $S = 2\pi a^2 \cos\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\alpha\right)$ при $a = 0{,}101$; $\alpha = 50°10'$.

1132. $S = 2b^2 \cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta)$ при $b = 2{,}002$; $\alpha = 53°17'$; $\beta = 25°29'$.

1133. $T = \sqrt{3}\,a^2 \sin^2\beta\,(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta)$ при $a = 30{,}03$; $\alpha = 28°40'$; $\beta = 52°18'$.

1134. $V = \dfrac{3R^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\,(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2}$ при $R = 20{,}8$; $\alpha = 37°20'$.

1135. $S = \dfrac{2h^2}{3}\sin^3\alpha \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}\,(\sqrt{2} + 2\cos\alpha)$ при $h = 17{,}06$; $\alpha = 55°08'$.

1136. $V = \dfrac{3\pi d^3}{2}\cos(\alpha - \beta)\,(3 - 4\sin^2\alpha)$ при $d = 0{,}1008$; $\alpha = 25°17'$; $\beta = 35°12'$.

1137. $V = \dfrac{2n^3}{3}\sin 2\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha)$ при $n = 20{,}03$; $\alpha = 78°12'$.

1138. $R = \dfrac{1}{2}\pi h \operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot(3 - \operatorname{ctg}^2\alpha)$ при $h = 0{,}837$; $\alpha = 46°30'$.

1139. $T = \dfrac{h^2}{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha}\right)$ при $h = 138$; $\alpha = 32°40'$.

1140. $S = \dfrac{\pi}{2}a^2\cos\alpha \cdot \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ при $a = 4569$; $\alpha = 37°33'$.

1141. $h = \dfrac{2\pi}{3}d\,(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha)$ при $d = 12{,}09$; $\alpha = 17°25'$.

1142. $R = \dfrac{h\sqrt{2\pi}}{\sin\alpha}\cos\dfrac{\alpha}{2}\,(1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha)$ при $h = 28{,}09$; $\alpha = 42°11'$.

1143. $V = \dfrac{3a^3}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$ при $a = 903{,}5$; $\alpha = 35°17'$.

1144. $T = 2R^2\sqrt{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\,(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$ при $R = 2{,}009$; $\alpha = 52°38'$.

1145. $V = \dfrac{4}{3}\pi d^3 \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\,(\cos\alpha - \sin\alpha)$ при $d = 23{,}67$; $\alpha = 37°17'$.

1146. $R = \dfrac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\left(1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}(30° + \alpha)}$ при $r = 0{,}056$; $\alpha = 17°$.

1147. $T = 0{,}3a^2 \operatorname{tg} 2\alpha\,(2\cos^2\alpha - \sin 2\alpha)$ при $a = 135{,}7$; $\alpha = 36°29'$.

1148. $V = 4\pi d^3 \cos\alpha\,(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$ при $d = 203$; $\alpha = 43°50'$.

1149. $S = 3ab\sin\frac{\alpha}{2}(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)$ при $a = 12{,}08$; $b = 30{,}51$; $\alpha = 10°17'$.

1150. $S = 0{,}5m^2[\cos\alpha + \cos\beta - \sin(\alpha+\beta)]$ при $m=16$; $\alpha=63°$; $\beta = 72°$.

1151. $T = 3\pi R^2\sin^3\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ при $R = 2{,}051$; $\alpha = 51°23'$.

1152. $S = 12\pi R^2\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)(\sqrt{3}+2\sin\alpha)$ при $R = 3{,}195$; $\alpha = 78°12'$; $\beta = 12°33'$.

1153. $x = \dfrac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$ при $b = 0{,}308$; $\alpha = 20°20'$.

1154. $V = \dfrac{4a^2b\sqrt{\sin^3\alpha}(0{,}75 - \cos^2\alpha)}{3\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$ при $a = 12{,}5$; $b = 8{,}09$; $\alpha = 63°10'$; $\beta = 10°10'$.

1155. $S = \frac{1}{4}a^2\sin 2\beta(2\sin 2\beta - \sqrt{3})$ при $a = 5{,}08$; $\beta = 40°40'$.

1156. $S = \dfrac{d^2}{2}\sqrt{\pi}\sin^2\alpha\left(\dfrac{\sec\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1-\cos 2\alpha}\right)$

при $d = 5{,}005$; $\alpha = 12°47'$.

1157. $T = \dfrac{b^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$ при $b = 0{,}08$; $\alpha = 65°$.

ГЛАВА VII

РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 21. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Соотношение между углами треугольника

1158. Доказать, что во всяком треугольнике имеют место соотношения:
1) $\sin A = \sin(B+C)$; 2) $\cos A = -\cos(B+C)$; 3) $\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(B+C)$;
4) $\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$; 5) $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B+C}{2}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{ctg}\frac{B+C}{2}$.

1159. Могут ли тригонометрические функции суммы двух углов треугольника принимать отрицательные значения? Почему?

1160. Определить углы треугольника ABC, зная, что

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{3} \text{ и } \operatorname{tg}(A-B)=1.$$

1161. Найти углы треугольника, если

$$\sin A+\sin B=\sqrt{3} \text{ и } \cos A+\cos B=1.$$

1162. Если A, B и C — углы треугольника, то

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A.$$

Доказать.

1163. Если A, B и C — углы треугольника и угол C—тупой, то

$$\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B<1.$$

1164. Как изменится знак неравенства в предыдущей задаче, если угол C будет прямой?

1165. Доказать, что треугольник — равнобедренный, если имеет место соотношение:

$$2\cos B=\sin A\cdot\operatorname{cosec} C.$$

1166. Если $\operatorname{tg} B:\operatorname{tg} C=\sin^2 B:\sin^2 C$, то треугольник или равнобедренный, или прямоугольный.

1167. Если $\dfrac{\cos A+2\cos C}{\cos A+2\cos B}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$, то треугольник или равнобедренный, или прямоугольный.

Теорема синусов

1168. Показать, что теорема синусов сохраняет силу и для прямоугольного треугольника.

1169. Определить радиус окружности, описанной около треугольника со стороной a и противолежащим ей углом α.

1170. Радиус окружности $R=10{,}12$ *дм*. Под каким углом из точки C, взятой на окружности, видна хорда $AB=15{,}08$ *дм*?

1171. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $17°10'$. Определить основание треугольника, если радиус описанной окружности равен $1{,}08$ *м*.

1172. Сила R разложена на две составляющие силы, образующие с ней углы α и β. Найти составляющие силы.

1173. В треугольнике ABC дано: $AB=10{,}35$; $C=28°16'$; $B=42°25'$. Определить BC и AC.

1174. В треугольнике ABC дано: $AB=93{,}05$; $AC=49{,}50$ и $C=112°51'$. Найти BC и A.

1175. Определить биссектрису прямого угла в прямоугольном треугольнике, если гипотенуза его равна c, а острый угол β.

1176. Вывести при помощи теоремы синусов свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника.

1177. Применяя теорему синусов, доказать, что во всяком треугольнике ABC имеет место соотношение:

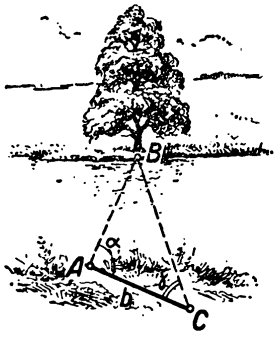
$$a = b\cos C + c\cos B.$$

1178. Найти площадь равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса R, если угол при вершине в этом треугольнике равен α.

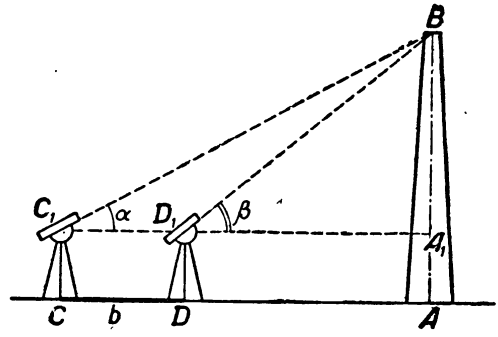
1179. Найти площадь треугольника, если радиус описанной около него окружности равен R, а два угла α и β.

1180. В равнобедренной трапеции основания равны 7 *см* и 1 *см*, а боковая сторона 5 *см*. Найти площадь круга, описанного около этой трапеции.

1181. Чтобы определить ширину реки AB, наметили дерево B, стоящее на другом берегу у самой воды, и от точки A, расположенной против дерева непосредственно у воды, провешили базис $AC = b$. Какова ширина реки, если $\angle BCA = \gamma$ и $\angle CAB = \alpha$ (черт. 48)?

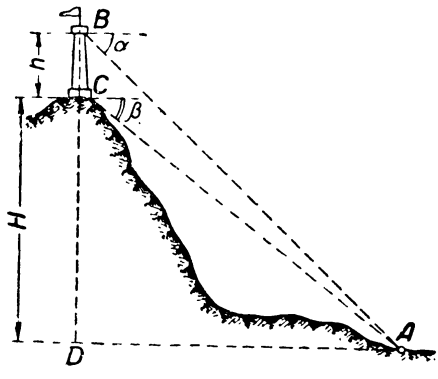


Черт. 48.



Черт. 49.

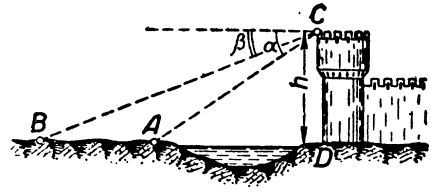
1182. Чтобы найти высоту фабричной трубы, к основанию которой нельзя подойти, провешили базис $CD = b$, продолжение которого упирается в основание трубы. Угол $A_1C_1B = \alpha$, угол $A_1D_1B = \beta$. Высота угломерного прибора равна h (черт. 49). Чему равна высота трубы?



Черт. 50.

1183. На горе находится башня BC высотой h метров (черт. 50). Некоторый предмет A наблюдают сначала с вершины башни B, затем от её основания C. Измерением найдены углы α и β. Определить высоту горы (из треугольников ABC и ADC).

1184. С башни, высота которой h метров, измерены углы α и β (черт. 51). Определить расстояние AB (из треугольника ABC).



Черт. 51.

1185. Если $a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = (a+b) \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$, то треугольник—равнобедренный. Доказать.

1186. Доказать, что во всяком треугольнике площадь

$$S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C,$$

где R — радиус описанной окружности.

1187. Вывести формулу $R = \frac{abc}{4S}$, выражающую радиус описанной окружности через стороны и площадь треугольника.

1188. Показать, что если стороны треугольника a, b, c составляют арифметическую прогрессию, то $\operatorname{ctg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{B}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{C}{2}$, где A, B и C — углы треугольника, противолежащие сторонам a, b и c, также составляют арифметическую прогрессию.

Теорема косинусов

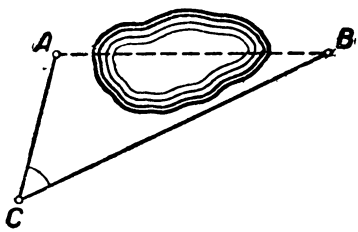
1189. Доказать теорему косинусов, опираясь на утверждение задачи 1162.

1190. Применить теорему косинусов к прямоугольному треугольнику.

1191. Стороны треугольника равны 6, 8, 10. Вычислить наибольший угол треугольника.

1192. Даны две стороны треугольника $a = 12$, $b = 13$ и угол между ними $\gamma = 22°$. Вычислить третью сторону.

1193. Чтобы определить расстояние от пункта A до пункта B, между которыми пройти было нельзя, выбрали третий пункт C так, что из него были видны и доступны оба пункта A и B; затем измерили расстояние $BC = 100$ *м*, $AC = 80$ *м* и угол $ACB = 48°$. Вычислить AB (черт. 52).



Черт. 52.

1194. Стороны параллелограма 4 *м* и 5 *м*. Угол его 52°. Найти обе диагонали.

1195. Определить равнодействующую R двух сил P и Q, действующих на материальную точку A под углом φ друг к другу. Рассмотреть случаи, когда: 1) $\varphi = 0$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi = 2\pi$.

1196. Доказать, что треугольник — равнобедренный, если

$$a = 2b\cos C.$$

1197. Доказать, что во всяком треугольнике имеет место соотношение:

1) $bc\cos A + ac\cos B = c^2$;

2) $bc\cos A - ac\cos B = b^2 - a^2$.

1198. Если котангенсы углов треугольника составляют арифметическую прогрессию, то квадраты сторон треугольника составляют также арифметическую прогрессию. Доказать.

1199. Дано: $2\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C$.

Доказать: $2b^2 = a^2 + c^2$.

Теорема тангенсов

1200. В треугольнике ABC дано:

$a = 8{,}36$; $b = 5{,}24$; $C = 62°10'$.

Определить A и B.

1201. Зная, что в треугольнике ABC $A = 60°$ и $b = c(2 + \sqrt{3})$, вычислить B и C.

1202. Две силы $P_1 = 12{,}6$ *кГ* и $P_2 = 35{,}0$ *кГ* приложены к одной точке под углом 81°50′. Определить величину равнодействующей и угол между равнодействующей и силой P_1.

1203. Решить задачу 1193, если $BC = 143$ *м*, $AC = 139$ *м* и $\angle ACB = 52°40'$.

1204. Из одной точки начали двигаться прямолинейно и равномерно два тела: одно со скоростью 2 *м* в секунду, другое со скоростью 3 *м* в секунду. Каково будет расстояние между телами по прошествии 10 секунд, если направления движения тел образуют угол в 34°?

§ 22. Решение косоугольных треугольников с применением таблиц логарифмов

Обозначения: a, b и c — стороны треугольника; A, B и C — противолежащие им углы; S — площадь; $2p$ — периметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.

Основные случаи решения косоугольных треугольников

Даны сторона и два угла:

1205. $a = 98{,}55$; $A = 23°42'$; $B = 47°24'$.

1206. $a = 48{,}8$; $B = 106°$; $C = 25°20'$.

1207. $b = 650{,}8$; $A = 46°04'$; $C = 18°52'$.

1208. $b = 0{,}307$; $A = 32°40'$; $B = 70°20'$.

1209. $c = 28{,}32$; $A = 42°24'$; $B = 72°29'$.

1210. $a = 71{,}05$; $B = 112°18'$; $C = 31°36'$.

Даны две стороны и угол между ними:

1211. $a = 93$; $b = 65$; $C = 42°$.

1212. $b = 4{,}42$; $c = 5{,}72$; $A = 65°20'$.

1213. $a=50{,}8;\ c=32{,}3;\ B=23°30'$.
1214. $a=20{,}73;\ b=36{,}26;\ C=70°45'$.
1215. $b=0{,}224;\ c=0{,}718;\ A=124°$.
1216. $a=87{,}38;\ b=62{,}24;\ C=82°46'$.

Даны две стороны и угол против одной из них:

1217. $a=62;\ b=48;\ A=50°$.
1218. $a=32;\ b=48;\ B=40°$.
1219. $a=17{,}8;\ b=18{,}3;\ B=132°$.
1220. $b=0{,}34;\ c=0{,}46;\ B=42°$.
1221. $b=12{,}7;\ c=28{,}3;\ B=70°30'$.
1222. $a=99{,}2;\ c=68{,}5;\ C=28°20'$.
1223. $a=1{,}45;\ c=2{,}11;\ A=63°50'$.
1224. $b=256;\ c=314;\ B=51°30'$.
1225. $b=83{,}42;\ c=67{,}32;\ B=124°38'$.
1226. $a=0{,}516;\ b=0{,}808;\ B=34°50'$.
1227. $a=21{,}75;\ c=27{,}34;\ A=49°54'$.
1228. $a=457{,}1;\ b=169{,}9;\ B=21°49'$.

Даны три стороны:

1229. $a=28;\ b=35;\ c=42$.
1230. $a=0{,}18;\ b=0{,}23;\ c=0{,}09$.
1231. $a=3{,}9;\ b=4{,}1;\ c=2{,}8$.
1232. $a=0{,}615;\ b=0{,}487;\ c=0{,}804$.
1233. $a=421{,}6;\ b=409{,}8;\ c=335{,}9$.
1234. $a=1{,}236;\ b=2{,}346;\ c=3{,}456$.

Особые случаи решения косоугольных треугольников

Задачи с 1235 по 1243 решить графически, а затем вычислением.

Определить угол C и стороны a, b и c треугольника по следующим данным:

1235. $R=9{,}8;\ A=52°;\ B=70°$.
1236. $a+b=m=21;\ A=64°;\ B=50°$.
1237. $a-b=n=0{,}85;\ A=112°;\ B=36°$.
1238. $2p=350;\ A=48°;\ B=26°$.
1239. $r=8{,}9;\ A=72°;\ B=40°$.

Определить углы и стороны треугольника по следующим данным:

1240. $a+b=36{,}5;\ c=18{,}2;\ C=52°30'$.
1241. $a-b=5{,}7;\ c=21{,}3;\ C=38°30'$.
1242. $a+b=14{,}3;\ c=5{,}2;\ A=102°40'$.
1243. $a-c=6{,}1;\ c=12{,}8;\ A=64°20'$.

Решить треугольники, зная, что:

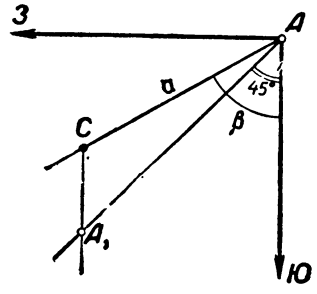
1244. $R=25{,}09;\ a=20{,}12;\ b=48{,}42$.
1245. $S=254{,}6;\ A=24°47';\ B=51°20'$.
1246. $S=2423;\ a=42{,}50;\ B=124°38'$.
1247. $S=12;\ a=6;\ b=8$.
1248. $S=15;\ ab=48;\ \sin A=\cos B$.
1249. $a=32;\ b=25;\ A=2B$.

§ 23. Задачи, требующче применения тригонометрии

1250. С аэродрома одновременно вылетают два самолёта: один по направлению на юго-восток со скоростью 192 *км* в час, а другой по направлению, образующему угол 23° с направлением на юг (с западной стороны) со скоростью 256 *км* в час. На каком расстоянии друг от друга будут находиться самолёты через 2 часа?

1251. Сила 400 *кГ* разложена на две составляющие, из которых одна равна 275 *кГ*, а вторая 325 *кГ*. Определить углы, образуемые направлениями составляющих с направлением данной силы.

1252. Две силы 404,2 *кГ* и 456,3 *кГ* действуют на материальную точку под углом 50°00′ друг к другу. Определить величину равнодействующей и углы между нею и данными силами.



Черт. 53.

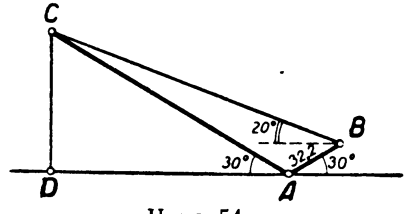
1253. Маяк *С*, находящийся от корабля *А* на расстоянии *а*, виден с корабля по направлению, образующему с направлением на юг угол β ($\beta > 45°$) с западной стороны от этого направления (черт. 53). Сколько миль должен проехать корабль на юго-запад, чтобы маяк был виден с него точно на север? Вычислить при $a=4{,}5$ миль, $\beta=52°$.

1254. Мачта стоит на склоне холма, угол наклона которого равен 12°30′. При высоте солнца в 37°40′ мачта отбрасывает по склону тень длиной 31,2 *м*. Найти высоту мачты.

1255. Стороны параллелограма 84,2 и 62,8, а меньшая диагональ 39,4. Найти бóльшую диагональ.

1256. Мачта высотой 12 *м* расположена на вершине конусообразного холма. Из точки ската холма, отстоящей от основания мачты на 50 *м*, вершина её видна под углом 40° к горизонту. Вычислить угол наклона ската холма.

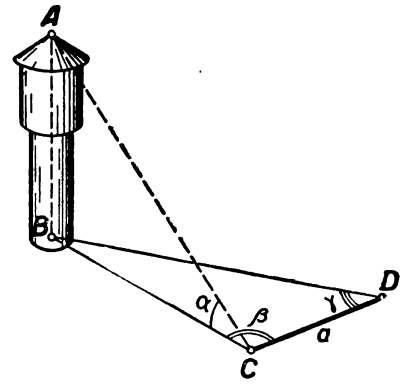
1257. Прямые *AB* и *AC*, находящиеся в вертикальной плоскости, наклонены к горизонту под углом 30° каждая. Расстояние $AB=32{,}2$ *м*, а угол наклона *BC* к горизонту составляет 20°. Определить высоту h точки *C* над горизонтом (черт. 54).



Черт. 54.

1258 Определить расстояние от данной точки *A* до дома, если из этой точки верхний край одного из окон этого дома виден под углом α к горизонту, а нижний — под углом β и если высота окна равна *a*. Вычислить при $a=1{,}50$ *м*; $\alpha=16°50'$; $\beta=3°30'$.

1259. Для определения высоты недоступной башни AB проведён в плоскости её основания базис $CD=a$, продолжение которого не проходит через основание башни. Измерены углы: $\angle ACB=\alpha$; $\angle BCD=\beta$ и $\angle BDC=\gamma$. Найти высоту башни. Вычислить при $a=35{,}00$ *м*, $\alpha=32°13'$; $\beta=110°28'$; $\gamma=47°43'$ (черт. 55).

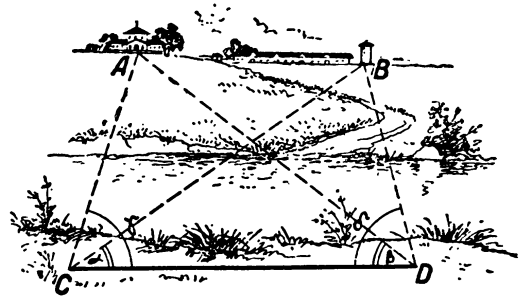


Черт. 55.

1260. Определить расстояние между двумя недоступными пунктами A и B, используя два наблюдательных пункта: пункт C, лежащий на прямой AB между пунктами A и B, пункт D в стороне от AB. Известно: $CD=d=460{,}7$ *м*;

$$\angle BCD=\alpha=95°16';$$
$$\angle ADC=\beta=52°48';$$
$$\angle BDC=\gamma=24°39'.$$

1261. Для определения расстояния между пунктами A и B, находящимися на противоположном берегу реки, измерили базис $CD=b$ и углы $DCA=\gamma$, $DCB=\alpha$, $CDA=\beta$ и $CDB=\delta$, образуемые базисом с направлением на пункты A и B из концов базиса (черт. 56). Каково расстояние между пунктами A и B?

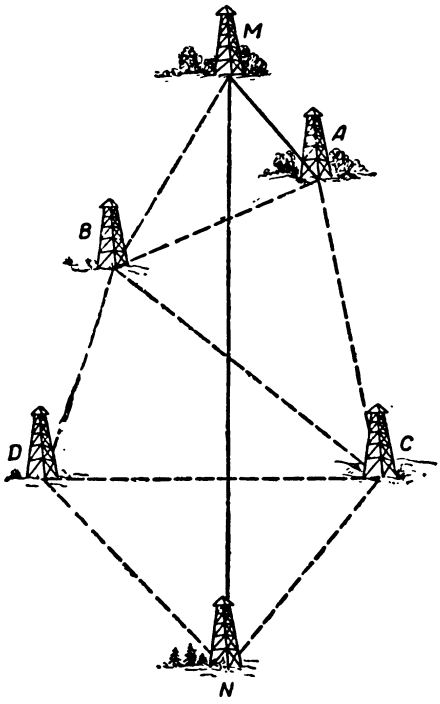


Черт. 56.

1262. Найти расстояние между двумя далёкими точками M и N на поверхности земли (способ триангуляции) по следующим данным (черт. 57):

$$MA\ (\text{базис})=2{,}25\ \ км;$$
$$\angle MAB=72°20';$$
$$\angle MBA=35°18';$$
$$\angle ABC=62°00';$$
$$\angle BCA=40°32';$$
$$\angle BCD=38°40';$$
$$\angle BDC=71°16';$$
$$\angle CDN=46°54';$$
$$\angle DNC=83°15'.$$

1263. Для нахождения расстояния от Земли до Луны на обсерваториях A и B, расположенных на одном меридиане, определили одновременно зенитные расстояния z_1 и z_2 Луны. Найти расстояние OO_1 от Земли до Луны, зная радиус Земли R и широты обсерваторий φ_1 и φ_2 (черт. 58).



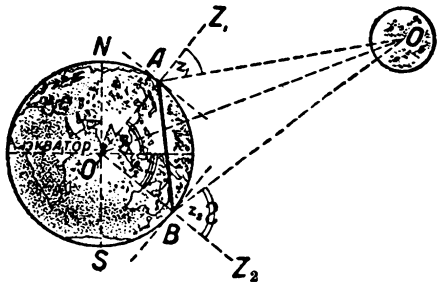
Черт. 57.

Практические работы

1264. Определить ширину реки или оврага.

1265. Определить высоту предмета, основание которого недоступно.

1266. Определить расстояние между двумя взаимно „невидимыми" точками.



Черт. 58.

1267. Определить расстояние между двумя недоступными точками.

1268. Определить высоту горы.

1269. Определить расстояние между двумя далёкими точками (методом триангуляции).

1270. Снять план какого-нибудь значительного участка земной поверхности (методом триангуляции).

ГЛАВА VIII

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 24. Обратные тригонометрические функции

Понятие функции

1271. Какие первоначальные понятия лежат в основе определения функции?

1272. 1) Какое соответствие между двумя числовыми множествами называется взаимно однозначным? 2) Обязательно ли соответствие между множеством значе-

ний аргумента и множеством значений функции должно быть взаимно однозначным?

1273. Что называется областью определения функции?

1274. Найти области определения следующих функций:

$$1)\ y=\sqrt{x};\quad 2)\ y=\sqrt{-x};\quad 3)\ y=\frac{1}{x^2-1};$$

$$4)\ y=\lg x;\quad 5)\ y=\lg\cos x;\quad 6)\ y=\lg|\sin x|.$$

1275. Какая функция называется возрастающей? убывающей? Привести примеры.

1276. Можно ли сказать, что функция x^2 возрастает: 1) при положительных значениях x? 2) при всех значениях x?

1277. Можно ли сказать, что функция x^3 возрастает?

1278. Является ли $\sin x$ возрастающей функцией?

1279. Является ли $\cos x$ убывающей функцией в промежутке: 1) от 0 до $0{,}5\pi$? 2) от 0 до π? 3) от 0 до 2π?

1280. Какое изменение функции называется монотонным? Приведите примеры монотонных функций.

1281. Укажите границы монотонного изменения каждой тригонометрической функции.

Обратная функция

1282. Каждому значению функции y можно поставить в соответствие те значения аргумента x, для которых функция равна y. Такое соответствие называется обратным. Охарактеризовать обратное соответствие, выражаемое функцией:

$$1)\ y=3x;\quad 2)\ y=2x-5;$$

$$3)\ y=x^2;\quad 4)\ y=|x|.$$

1283. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две взаимно обратные функции, то что можно сказать о функции:

$$1)\ \varphi[f(x)]?\quad 2)\ f[\varphi(x)]?$$

1284. На одном и том же чертеже построить графики взаимно обратных функций:

$$1)\ y=2x \text{ и } y=0{,}5x;\quad 2)\ y=3x+2 \text{ и } y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3};$$

$$3)\ y=x^2 \text{ и } y=\pm\sqrt{x};\quad 4)\ y=2^x \text{ и } y=\log_2 x.$$

Как расположены графики взаимно обратных функций относительно прямой $y=x$ (биссектрисы координатного угла)?

1285. Доказать, что если для данной точки $M(x;y)$ мы поменяем местами x и y, то получившаяся точка $M_1(y;x)$ будет симметрична первой относительно прямой $y=x$. Какой способ построения графика функции, обратной данной, можно указать на основании этого утверждения?

1286. Как отражается на графике функции свойство её монотонности? однозначности? многозначности?

1287. Зная характер изменения некоторой функции, как узнать, будет ли обратная ей функция в данном промежутке однозначна или многозначна? Привести примеры.

Обратные тригонометрические функции

1288. В следующих равенствах выразить x с помощью обратных тригонометрических функций:

1) $\sin x = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = 0{,}3$; 3) $\operatorname{tg} x = -2$;

4) $\operatorname{ctg} x = 1{,}5$; 5) $\sin 2x = -\frac{2}{5}$; 6) $\cos \frac{x}{3} = 0{,}8$;

7) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \pi$; 8) $\operatorname{ctg}(2x - 1) = \sqrt{2}$.

1289. Указать область определения каждой из следующих функций:

1) $\operatorname{Arc}\sin 2x$; 2) $\operatorname{Arc}\cos \frac{x}{3}$; 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 5x$;

4) $\operatorname{Arc}\sin (x - 1)$; 5) $\operatorname{Arc}\cos (2x - 1)$; 6) $\operatorname{Arc}\sin \frac{x+1}{2}$.

1290. В пределах от 0 до π найти все значения:

1) $\operatorname{Arc}\sin \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{Arc}\cos 0{,}5$; 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-1)$;

4) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}\sqrt{3}$; 5) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}(-1)$; 6) $\operatorname{Arc}\cos(-0{,}9713)$ (по таблице).

1291. В пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ найти все значения:

1) $\operatorname{Arc}\sin \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{Arc}\cos \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 1$;

4) $\operatorname{Arc}\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 5) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}(-1)$; 6) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-\sqrt{3})$;

7) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 2{,}3600$ (по таблице).

1292. В пределах от 0 до 2π найти все значения:

1) $\operatorname{Arc}\sin 0$; 2) $\operatorname{Arc}\cos 0$; 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 0{,}8087$ (по таблице); 4) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-2{,}5722)$ (по таблице); 5) $\operatorname{Arc}\sin(-0{,}7771)$ (по таблице); 6) $\operatorname{Arc}\cos 0{,}9211$ (по таблице).

1293. Написать общие выражения для следующих дуг:

1) $\operatorname{Arc}\sin 1$; 2) $\operatorname{Arc}\cos 0$; 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

4) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\operatorname{Arc}\sin 0{,}5$; 6) $\operatorname{Arc}\cos(-0{,}9323)$;

7) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 1{,}1616$.

1294. Зная график функции $y = \sin x$, как построить график функции $y = \operatorname{Arc}\sin x$? Как на графике отражается многозначность этой функции?

Ответить на аналогичные вопросы относительно функций:

1) $\operatorname{Arc}\cos x$; 2) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$; 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$.

1295. Дана функция $y=\frac{1}{2}\sin x$. Найти функцию, обратную данной; указать область определения этой обратной функции и построить её график.

1296. То же для функции $y=2\cos x$ (см. задачу 1295).

1297. Известно, что обратная функция однозначна на том промежутке, где прямая функция изменяется монотонно. Пользуясь этим, укажите границы промежутка однозначности для функций:

1) $y=\operatorname{Arc}\sin x$; 2) $y=\operatorname{Arc}\cos x$; 3) $y=\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$; 4) $y=\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$.

Какие значения принимают в этих границах синус? косинус? тангенс? котангенс?

§ 25. Главные значения обратных тригонометрических функций

1298. 1) Дать определение функции $y=\arcsin x$. 2) Указать область определения и область значений этой функции. 3) Чему равно выражение $\sin(\arcsin x)$? 4) Как изменяется функция $y=\arcsin x$ при изменении x от -1 до 1? 5) Как можно построить график функции $y=\arcsin x$? 6) При каких значениях аргумента x эта функция принимает положительные значения? отрицательные значения? равна нулю? 7) Как изменяется значение этой функции при изменении знака аргумента?

Ответить на аналогичные вопросы относительно функций:

1) $y=\arccos x$; 2) $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$; 3) $y=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$.

1299. Для каких обратных тригонометрических функций главное значение её совпадает с наименьшим по абсолютной величине значением функции? с наименьшим положительным значением функции?

1300. Почему главное значение арксинуса и арктангенса нельзя выбирать в промежутке от 0 до π?

1301. Известно, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc}\operatorname{tg} x<\frac{\pi}{2}$.

Почему $\arcsin x$ может принимать значения $\pm\frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ этих значений принимать не может?

1302. В каких границах может заключаться дуга:

1) $2\arcsin x$? 2) $2\arccos x$?

1303. Указать область определения каждой из данных функций:

1) $y = \arcsin 3x$; 2) $y = \arccos(1 - x)$; 3) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}$;

4) $y = \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{x}$; 5) $y = \arcsin(x + 1)$; 6) $y = \arccos \frac{1}{x}$;

7) $y = \arcsin \sqrt{x}$; 8) $y = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{x}$; 9) $y = \arcsin \frac{1}{x-2}$;

10) $y = \arcsin(\lg x)$; 11) $y = \arccos(\operatorname{cosec} x)$.

1304. Указать область определения каждой из данных функций:

1) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; 2) $y = \arcsin(\arcsin x)$;

3) $y = \arcsin(\sin x)$; 4) $y = \arccos(\cos x)$;

5) $y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$; 6) $y = \arcsin \sqrt{1-x} + 2 \arcsin \sqrt{x}$;

7) $y = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{x}$; 8) $y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{1+x}$;

9) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$; 10) $y = \arccos(2x^2 - 1) + \arcsin x$.

1305. При каких значениях x следующие функции принимают действительные значения:

1) $\sqrt{\arcsin x}$; 2) $\sqrt{\arccos x}$; 3) $2^{\operatorname{arc\,tg} x}$?

1306. Известно, что $\sin \frac{5}{6}\pi = 0{,}5$. Можно ли написать, что $\arcsin 0{,}5 = \frac{5}{6}\pi$?

1307. Записать при помощи тригонометрических функций равенства:

1) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; 3) $\arccos(-0{,}5) = 120°$;

4) $\operatorname{arc\,tg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; 5) $\operatorname{arc\,ctg} 0 = \frac{\pi}{2}$; 6) $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

1308. Записать при помощи обратных тригонометрических функций равенства:

1) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; 2) $\sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$;

4) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\cos 90° = 0$; 6) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$; 7) $\operatorname{ctg} 150° = -\sqrt{3}$.

1309. Представить x как функцию от y:

1) $y = \arcsin \frac{x}{2}$; 2) $y = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3}$; 3) $y = 5 \arccos 3x$:

4) $y - 1 = 3 \arccos \frac{x}{2}$; 5) $2y = 3 \operatorname{arc\,ctg} \frac{2}{x}$.

1310. Представить x как функцию от y:

1) $y = \operatorname{tg} 3x$; 2) $y = 4 \operatorname{tg} 3x$; 3) $y = 0{,}1 \cos \frac{x}{5}$;

4) $y = 2 \sin (x + 1)$; 5) $y = 2 \cos (2 - x)$; 6) $y = 1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

1311. Найти x, если:

1) $\arcsin (x - 1) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos (3x + 2) = \frac{\pi}{3}$.

1312. Найти главные значения обратных тригонометрических функций:

1) $\operatorname{Arc} \sin 0$; 2) $\operatorname{Arc} \cos 0$; 3) $\operatorname{Arc} \cos (-1)$;

4) $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{3}$; 5) $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} (-1)$; 6) $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} (-1)$.

1313. Доказать геометрическим путём:

1) $\arcsin (-x) = -\arcsin x$, $|x| \leqslant 1$;

2) $\arccos (-x) = \pi - \arccos x$, $|x| \leqslant 1$;

3) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-x) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} (-x) = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$.

1314. Пользуясь соотношениями задачи 1313, найти:

1) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-1)$;

4) $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} (-\sqrt{3})$, 5) $\arcsin 0{,}3 + \arcsin (-0{,}3)$;

6) $\arccos \frac{2}{3} + \arccos \left(-\frac{2}{3}\right)$.

1315. Построить дуги, заданные следующими выражениями:

1) $\arcsin \frac{1}{2}$; 2) $\arccos \frac{3}{4}$; 3) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$; 4) $\arcsin 0{,}6$;

5) $\arcsin \left(-\frac{2}{3}\right)$; 6) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3}$; 7) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-1\frac{1}{2}\right)$; 8) $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} (-2{,}5)$;

9) $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{2}{5}$; 10) $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} (-2)$; 11) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2$.

1316. (Устно.) Найти: 1) $\arcsin 0{,}5$; 2) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-\sqrt{3})$;

3) $\arccos 0{,}5$; 4) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$; 5) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1$; 6) $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} (-1)$;

7) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0$; 8) $-\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 9) $-\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

10) $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$; 11) $\frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$; 12) $\frac{1}{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

13) $3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1$; 14) $2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1317. (Устно.) Вычислить:

1) $\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3}$; 2) $\arccos 1 + 2 \arccos \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} + \frac{2}{3} \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\arcsin 1 - \arccos \frac{1}{2}$;

5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\operatorname{arc\,tg}(-1) + \frac{\pi}{4}$;

7) $\operatorname{arc\,ctg}(-1) - \frac{3\pi}{4}$; 8) $\arccos 0 + \frac{\pi}{2}$.

Найти числовые значения выражений (устно, задачи 1318—1320).

1318. 1) $\sin(\operatorname{arc\,tg} 1)$; 2) $\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}5)$;

3) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$; 4) $\operatorname{tg}(\arccos 1)$.

1319. 1) $\cos\left(2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

3) $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}[2 \operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3})]$.

1320. 1) $\operatorname{tg}(\arcsin 1)$; 2) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

4) $\cos[\operatorname{arc\,ctg}(-1) - 2 \arcsin(-0{,}5)]$ (по таблице).

1321. Проверить равенства:

1) $2 \operatorname{arc\,tg} 1 = 3 \arcsin \frac{1}{2}$; 2) $3 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \arcsin 1$;

3) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arc\,ctg} 0$;

4) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \arccos 0 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3}$.

1322. Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций, найти в градусах и радианах:

1) $\arcsin 0{,}3420$; 2) $\arccos 0{,}7660$; 3) $\operatorname{arc\,tg} 1{,}1918$;
4) $\arccos(-0{,}8910)$; 5) $\operatorname{arc\,tg}(-2{,}050)$; 6) $\operatorname{arc\,ctg} 0{,}7002$;
7) $\operatorname{arc\,ctg}(-0{,}6420)$; 8) $\arcsin 0{,}8415$; 9) $\arccos(-0{,}2588)$.

1323. Дано: $x > 0$. Какое из чисел: x или $\arcsin x$ — является бóльшим?

1324. Найти числовое значение выражения $x + \arcsin x$ при

1) $x = 0$; 2) $x = \frac{1}{2}$; 3) $x = 0{,}5\sqrt{2}$; 4) $x = 0{,}5\sqrt{3}$; 5) $x = 1$.

1325. Пользуясь таблицами, найти с точностью до 0,001 числовое значение выражения $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} 3x$ при 1) $x=0{,}1$; 2) $x=1$; 3) $x=\frac{1}{3}$; 4) $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $x=-0{,}5$; 6) $x=-1$.

1326. Какой смысл имеют выражения:

1) $\arcsin x^2$; 2) $(\arcsin x)^2$?

1327. Выразить острые углы прямоугольного треугольника: 1) через его катет a и гипотенузу c; 2) через его гипотенузу c и площадь S.

§ 26. Преобразование обратных тригонометрических функций

Тригонометрические операции над аркфункциями

1328. Указать область применения каждого из следующих равенств:

1) $\sin(\arcsin x)=x$;
2) $\cos(\arccos x)=x$;
3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x$;
4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=x$.

1329. Исследовать функцию $y=\sin(\arcsin x)$ и построить её график.

1330. Какая разница между функциями: 1) $y=x$ и $y=\cos(\arccos x)$; 2) $y=-x$ и $y=\cos[\arccos(-x)]$. Показать на графике.

1331. Доказать:

1) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $|x|\leqslant 1$;

2) $\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\neq 0$.

1332. Дать геометрическое истолкование соотношению

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},\ |x|\leqslant 1.$$

Вычислить (задачи 1333 — 1352):

1333. (Устно.) 1) $\sin(\arcsin 0{,}3)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 1{,}2)$; 3) $\cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}[\operatorname{arc\,ctg}(-2)]$.

1334. 1) $\cos(\arcsin 0{,}6)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{5}\right)$;

3) $\sin(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3})$; 4) $\sin\left(\arccos\frac{28}{53}\right)$;

5) $\sin[\operatorname{arc\,ctg}(-1{,}05)]$; 6) $\cos(\operatorname{arc\,tg} 4{,}95)$;

7) $\operatorname{ctg}\left[\arcsin\left(-\frac{99}{101}\right)\right]$; 8) $\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{40}{41}\right)\right]$;

9) $\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\frac{20}{101}\right)\right]$; 10) $\cos(\operatorname{arc\,tg} a)$.

1335. $\sin(\arcsin 0{,}6 + \arcsin 0{,}8)$.

1336. $\sin(\arccos 0{,}28 + \arccos 0{,}96)$.

1337. $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right) + \arcsin\frac{20}{29}\right]$.

1338. $\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin\frac{3}{5}\right]$.

1339. $\sin\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

1340. $\cos\left[\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arc\,ctg}\frac{2}{3}\right]$.

1341. $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right)$. **1342.** $\cos\left(2\arccos\frac{2}{3}\right)$.

1343. $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$. **1344.** $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 1, (3)\right)$.

1345. $\sin[2\arcsin(-0{,}6) + \arccos(-0{,}6)]$.

1346. $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3} - \arccos\frac{1}{4}\right)$.

1347. $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin m\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin m\right)$, $|m| \leqslant 1$.

1348. $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin a\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin a\right)$, $|a| \leqslant 1$.

1349. $\cos\left(3\arcsin\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$.

1350. $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arc\,tg} 1 - 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)$.

1351. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)$.

1352. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}\right)$.

Проверить справедливость равенств (задачи 1353 — 1361):

1353. $\sin\left(\arccos\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $|x| \geqslant 1$.

1354. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}\right) = x$, $x \neq 0$.

1355. $\operatorname{tg}(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x) = x$, $|x| < 1$.

1356. $\frac{\sin(\arccos x)}{\operatorname{tg}(\arccos x)} = x$, $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$.

1357. $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $|x| \leqslant 1$.

1358. $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$, $|x| \leqslant 1$.

1359. $\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{2x}{1-x^2}$, $x \neq \pm 1$.

1360. $\sin(2\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1361. $\cos(2\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Основные соотношения между аркфункциями

1362. Исходя из зависимости между тригонометрическими функциями дополнительных углов, доказать тождества:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

2) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Привести геометрические пояснения к этим формулам для случаев $x > 0$ и $x < 0$.

1363. Проверить справедливость равенств:

1) $\operatorname{arc\,ctg}(-7) - \operatorname{arc\,tg} 7 = \frac{\pi}{2}$;

2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = \arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{arc\,tg}(-0{,}3) = \operatorname{arc\,ctg} 0{,}3 - \frac{\pi}{2}$.

1364. Пользуясь зависимостью между синусом и косинусом одного и того же угла, доказать тождество

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Как изменится эта формула для отрицательных значений x? Дать геометрическое истолкование в обоих случаях.

Доказать справедливость следующих формул (задачи 1365—1371):

1365. $$\arccos = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

1366. $$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \\ \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

1367. $$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \\ \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & \text{если } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

1368. $$\operatorname{arc\,tg} x = \begin{cases} \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} - \pi, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

1369. $\operatorname{arc\,tg} x = \begin{cases} \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$

1370. $\operatorname{arc\,ctg} x = \begin{cases} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x > 0; \\ \pi - \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

1371. $\operatorname{arc\,ctg} x = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

1372. Выразить:

1) $\operatorname{arc\,ctg} x$ через арккосинус; 2) $\operatorname{arc\,tg} x$ через арксинус; 3) $\arccos x$ через арккотангенс; 4) $\arcsin x$ через арккосинус;

Доказать равенства (задачи 1373 — 1378):

1373. $\arcsin 0{,}96 = \arccos 0{,}28$.

1374. $\arcsin\left(-\frac{20}{101}\right) = -\arccos\frac{99}{101}$.

1375. $\arcsin\frac{9}{41} = \operatorname{arc\,tg}\frac{9}{40}$.

1376. $\operatorname{arc\,ctg} 3 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$.

1377. $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \operatorname{arc\,tg} 2$.

1378. $\operatorname{arc\,tg} 2 = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$.

1379. Определить x, если:

1) $\arcsin\frac{20}{29} = \arccos x$; 2) $\arcsin\left(-\frac{28}{53}\right) = -\arccos x$;

3) $\operatorname{arc\,tg} 4{,}95 = \operatorname{arc\,ctg} x$; 4) $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{11}{60}\right) = -\operatorname{arc\,tg} x$.

1380. Найти x и y, если:

1) $\arcsin\frac{480}{481} = \arccos x = \operatorname{arc\,tg} y$;

2) $\arccos m = \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,sec} y$.

Произвести сложение (задачи 1381 — 1384):

1381. $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$. **1382.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$.

1383. $\operatorname{arc\,ctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{7}$.

1384. $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}$.

Проверить справедливость равенств (задачи 1385—1399):

1385. $\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$.

1386. $\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{9}+\operatorname{arc\,ctg}\frac{4}{5}=\frac{3\pi}{4}$.

1387. $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}$.

1388. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

1389. $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}+\operatorname{arc\,ctg}(2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{4}$.

1390. $\operatorname{arc\,tg}1+\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3=\pi$.

1391. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

1392. $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{7}=\arccos\left(-\frac{11}{14}\right)$.

1393. $\arcsin 0{,}6-\arcsin 0{,}8=-\arcsin 0{,}28$.

1394. $\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{2}{11}$.

1395. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}+1)^2$.

1396. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}+\operatorname{arc\,tg}\frac{a-1}{a+1}=\frac{\pi}{4}$, $a>0$.

1397. $\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sqrt{3}}{4-a}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a-1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$, $1<a<4$.

1398. $\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\frac{\pi}{4}, & \text{если } x>-1;\\ -\frac{3\pi}{4}, & \text{если } x<-1.\end{cases}$

1399. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{32}{43}$.

Доказать тождества (задачи 1400 — 1401):

1400. $2\arccos x=\begin{cases}\arccos(2x^2-1), & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2\pi-\arccos(2x^2-1), & \text{если } -1\leqslant x<0.\end{cases}$

1401. $2\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$, если $-1<x<1$.

1402. Произвести действия:

1) $2 \arcsin \frac{5}{13}$; 2) $2 \arcsin \frac{15}{17}$; 3) $2 \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$;

4) $2 \arccos 0{,}75$; 5) $2 \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$; 6) $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$;

7) $2 \operatorname{arctg} 1{,}5$; 8) $2 \operatorname{arctg}(-2)$; 9) $\frac{1}{2} \arcsin(-0{,}6)$;

10) $\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8}$.

1403. Доказать, что сумма

$$\arcsin x + 3\arccos x + \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

не зависит от x, если $x^2 < \frac{1}{2}$.

Исследовать функции и построить их графики (задачи 1404—1406):

1404. $y = \arcsin(\sin x)$. **1405.** $y = \arccos(\cos x)$.

1406. 1) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; 2) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

Вычислить (задачи 1407—1410):

1407. 1) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$;

3) $\arcsin(\sin \pi)$; 4) $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.

1408. 1) $\arccos\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $\arccos(\cos 2\pi)$;

3) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{17\pi}{10}\right)\right]$; 4) $\arccos(\cos 3\pi)$.

1409. 1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}\right)$;

3) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

1410. 1) $\arcsin\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\arccos\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$;

3) $\operatorname{ars}\sin(\cos 1)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$.

1411. Решить уравнения:

1) $\arcsin x = \arccos x$; 2) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} x$;

3) $\pi - \arcsin x = \arccos x$; 4) $\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arcctg} 3x = \frac{\pi}{4}$;

5) $2x = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x)$.

ГЛАВА IX

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшие тригонометрические уравнения

1412. Вписать в окружность правильный шестиугольник и, приняв одну из его вершин за начало дуг, написать общее выражение дуг, имеющих конец в каждой из остальных вершин.

1413. Найти частные значения угла $x=30°(3k\pm1)$, полагая $k=0;\ 1;\ 2;\ 3$.

1414. По данному общему виду угла x написать его частные положительные значения, меньшие $360°$ (2π):

1) $x=15°+120°k$; 2) $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$; 3) $x=\pm120°+180°k$;

4) $x=(-1)^k 45°+180°k$; 5) $x=180°k\pm60°-30°$.

1415. Выразить одной формулой следующие серии углов:

1) $x=180°k+120°$ и $x=180°k+30°$;

2) $x=\pi k+\frac{\pi}{6}$ и $x=\pi k-\frac{\pi}{3}$;

3) $x=90°k$ и $x=45°(4k\pm1)$;

4) $x=\pi k$ и $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$;

5) $x=120°k\pm15°$ и $x=120°k\pm45°$;

6) $x=\pi k$; $x=2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$ и $x=2\pi k\pm\frac{2\pi}{3}$;

7) $x=180°k+140°$; $x=180°k+80°$ и $x=180°k+20°$;

8) $x=180°k+(-1)^k 60°$ и $x=180°k-(-1)^k 60°$.

1416. Исключить повторяющиеся углы в следующих формулах:

1) $x_1=90°k$ и $x_2=60°k+30°$;

2) $x_1=\frac{\pi k}{2}$ и $x_2=\frac{\pi k}{5}$;

3) $x_1=\frac{1}{4}\pi k$ и $x_2=\frac{1}{2}\pi k\pm\frac{1}{4}\pi$;

4) $x_1=\pi(2k+1)-\frac{\pi}{6}$ и $x_2=\frac{2}{5}\pi k+\frac{1}{30}\pi$;

5) $x_1=72°k+36°$ и $x_2=120°k+60°$.

Решить уравнения (задачи 1417 — 1432):

1417. $\sin x=0$. **1418.** $\cos x=0$. **1419.** $\operatorname{tg} x=0$.
1420. $\operatorname{ctg} x=0$. **1421.** $\sin x=1$. **1422.** $\sin x=-1$.
1423. $\cos x=1$. **1424.** $\cos x=-1$. **1425.** $\operatorname{tg} x=-1$.

1426. $\operatorname{tg} x = \pm 1$. **1427.** $\cos x = -\frac{1}{2}$. **1428.** $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1429. $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. **1430.** $\operatorname{tg} x = -0{,}6009$ (по таблице).

1431. $\operatorname{ctg} x = -5{,}671$ (по таблице). **1432.** $2\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$.

1433. Тригонометрическое уравнение $\sin 2x = -0{,}5$ решено так:

$$2x = -30^\circ; \quad x = -15^\circ; \quad x_1 = -15^\circ + 360^\circ k,$$

$$x_2 = 15^\circ + 180^\circ (2k + 1).$$

Где ошибка?

1434. Показать, что все корни уравнения $\sin x = 0$ являются корнями уравнения $\sin 3x = 0$. Можно ли считать эти уравнения равносильными?

Решить уравнения (задачи 1435—1447):

1435. $\operatorname{tg}(x + 15^\circ) + 1 = 0$. **1436.** $\cos 5x = 0$.

1437. $2\sin 3x - 1 = 0$. **1438.** $\cos\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) - 1 = 0$.

1439. $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$. **1440.** $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{3} = 0$.

1441. $3\operatorname{tg}(x + 1) - \sqrt{3} = 0$. **1442.** $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$.

1443. $\operatorname{ctg}(30^\circ - 2x) = -2{,}050$ (по таблице).

1444. $3\cos 5x - 2 = 0$. **1445.** $3\operatorname{tg}^2 3x - 1 = 0$.

1446. $\cos^2\left(\frac{x}{2} + 60^\circ\right) - 1 = 0$. **1447.** $2\sin^2 2x - 1 = 0$.

Найти все острые положительные углы, удовлетворяющие уравнениям (задачи 1448—1450):

1448. $\sin \pi x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1449. $\cos \pi x = -0{,}5$.

1450. $\operatorname{tg} \pi x = \sqrt{3}$.

Решить уравнения (задачи 1451—1457):

1451. $\sin(\pi x^2) = 0$.

1452. $\operatorname{tg}(\pi x^2) = \pm 1$.

1453. $\cos(x^2) = \frac{1}{2}$.

1454. $\sin(\cos x) = 0{,}5$.

1455. $\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1456. $\sin(2\cos 2x) = \pm 1$.

1457. $\operatorname{tg}(\pi \sin \pi x) = \sqrt{3}$.

Тригонометрические уравнения, приводимые к одной функции одного и того же аргумента

1458. В каких случаях решение тригонометрического уравнения может привести к потере корней или к появлению посторонних корней?

1459. Равносильны ли уравнения:

1) $2\cos x+3=4\cos\frac{x}{2}$

и $2\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)+3=4\cos\frac{x}{2}$?

2) $2\cos x+3=4\cos\frac{x}{2}$ и $2\cos x+3=4\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$?

Решить уравнения (задачи 1460 — 1473):

1460. $\sin^2 x+2\sin x-3=0$. **1461.** $\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0$.

1462. $2\cos^2(x+30°)-3\sin(60°-x)+1=0$.

1463. $\cos^2(45°+x)-\cos^2(45°-x)=0$.

1464. $\cos 2x+\cos x=0$.

1465. $2\sin x\cdot\operatorname{ctg} x+1=\cos x$.

1466. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2=0$.

1467. $\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x=4$.

1468. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

1469. $3\operatorname{tg}^2 x-\sec^2 x=1$.

1470. $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=\sin x$.

1471. $1-\cos(\pi-x)+\sin\frac{\pi+x}{2}=0$.

1472. $\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos 2x\cdot\sec^2 x$.

1473. $\sin^3 x\cdot\cos 3x+\sin 3x\cdot\cos^3 x=0{,}375$.

1474. В треугольнике ABC стороны AB и AC соответственно равны 6 *см* и 5 *см*. Вычислить угол A, если площадь треугольника ABC на 1 *кв см* больше площади квадрата, сторона которого равна расстоянию от вершины B до стороны AC.

Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

1475. Как решается тригонометрическое уравнение, левая часть которого — произведение множителей, содержащих неизвестное, а правая часть — нуль?

1476. Показать, что уравнения $\sin^2 2x-\sin^2 x-1=0$ и $\sin(3x-\pi)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1=0$ равносильны.

1477. Будут ли равносильными уравнения:

1) $\operatorname{tg} 3x(1+\sin 2x)(2-\cos 3x)=0$ и $\operatorname{tg} 3x(1+\sin 2x)=0$?

2) $(2\cos x-1)\sin x(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)=0$ и $(2\cos x-1)(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)=0$?

3) $\sin x\cdot\operatorname{tg} 3x\left(1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)=0$ и $\sin x\left(1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)=0$?

4) $\sin x\cdot\operatorname{tg} 3x\left(1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)=0$ и $\operatorname{tg} 3x\left(1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)=0$?

Решить уравнения (задачи 1478—1498):

1478. $(1+\cos x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$.

1479. $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x\cdot\sin 3x=0$.

1480. $\sin x\cdot\operatorname{tg} 2x\cdot\sec 3x=0$.

1481. $\sin 5x\cdot\operatorname{tg} 4x\cdot\cos 2x=0$.

1482. $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$.

1483. $\sin x-\cos x=1$.

1484. $\sin x+\cos x=1$.

1485. $\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=1$.

1486. $\sin x+\cos x=\sec x$.

1487. $\sin x+\cos x=\operatorname{cosec} x$.

1488. $\cos 4x+2\cos^2 x=0$.

1489. $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}-45^\circ\right)$.

1490. $\sin x+\cos x=1+\sin 2x$.

1491. $\sin(x+30^\circ)+\cos(x+60^\circ)=1+\cos 2x$.

1492. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

1493. $\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1$.

1494. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin 3x$.

1495. $1-\cos^2 2x=\sin 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

1496. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

1497. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.

1498. $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$.

Тригонометрические уравнения, решаемые при помощи условий равенства двух одноимённых функций

1499. Какая существует связь между двумя дугами α и β, если известно, что: 1) синусы этих дуг равны? 2) косинусы их равны? 3) тангенсы равны? 4) котангенсы равны?

1500. Для каких дуг (x): 1) $\sin x$ равен $\cos x$? 2) $\sin x$ равен $\operatorname{tg} x$? 3) $\operatorname{tg} x$ равен $\operatorname{ctg} x$? 4) $\cos x$ равен $\operatorname{ctg} x$?

1501. Показать, что не существует дуги x, для которой: 1) $\sin x$ равен $\sec x$; 2) $\cos x$ равен $\operatorname{cosec} x$.

1502. Найти зависимость между x и y, если:

1) $\sin x=-\sin y$; 2) $\cos x=-\cos y$; 3) $\operatorname{tg} x=-\operatorname{tg} y$.

Решить следующие уравнения (задачи 1503 — 1524):

1503. 1) $\sin 3x = \sin x$; 2) $\sin x = \sin 10^\circ$.

1504. 1) $\sin 2x - \sin 3x = 0$; 2) $\sin x - \sin 20^\circ = 0$.

1505. 1) $\sin x + \sin 2x = 0$; 2) $\sin \frac{3x}{2} + \sin 15^\circ = 0$.

1506. 1) $\cos 6x = \cos 4x$; 2) $\cos 3x = \cos 12^\circ$.

1507. 1) $\cos x - \cos 7x = 0$; 2) $\cos 2x - \cos 50^\circ = 0$.

1508. 1) $\cos (3x + 45^\circ) + \cos 15^\circ = 0$; 2) $\sin x + \cos 2x = 0$.

1509. $\cos 5x - \sin \frac{7\pi}{8} = 0$. **1510.** $\operatorname{tg} (45^\circ - x) = \operatorname{tg} 2x$.

1511. $\operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} 8x = 0$. **1512.** $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg} x$.

1513. $\operatorname{tg} (2x + 1) + \operatorname{tg} x = 0$.

1514. $\operatorname{tg} (x + 15^\circ) + \operatorname{ctg} (x + 45^\circ) = 0$.

1515. $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 1$.

1516. $\sin 6x \cdot \sec 4x = 1$.

1517. $\cos (0{,}5x^2) = \cos x$.

1518. $\cos (2\pi \sqrt{x}) = \cos \pi x$.

1519. $2 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (x + 45^\circ) + \operatorname{tg} (x - 45^\circ)$.

1520. $\operatorname{tg} (x - 45^\circ) \operatorname{tg} (x + 45^\circ) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 0$.

1521. $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \operatorname{ctg} 2x$. **1522.** $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{ctg} x$.

1523. $\sin^2 (45^\circ + x) - \sin^2 (30^\circ - x) - \sin 15^\circ \cdot \cos (15^\circ + 2x) = \sin x$.

1524. $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x - 1 = 2 \cos x$.

Тригонометрические уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$

Решить уравнения (задачи 1525 — 1541).

1525. $\sin x = \cos x$.

1526. $5 \sin 3x - 2 \cos 3x = 0$.

1527. $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$.

1528. $\sin (x + 30^\circ) + \cos (x + 30^\circ) = 0$.

1529. $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$.

1530. $\cos^2 5x + 7 \sin^2 5x = 8 \cos 5x \cdot \sin 5x$.

1531. $\cos^3 x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot \sin^2 x - 3 \cos x \cdot \sin^3 x - 3 \sin^4 x = 0$.

1532. $\sin^6 x + \sin^4 x \cdot \cos^2 x = \sin^3 x \cdot \cos^3 x + \sin x \cdot \cos^5 x$.

1533. $\sin^2 x + 0{,}5 \sin 2x - 2 \cos^2 x = 0$.

1534. $3 \sin^2 2x - 0{,}5 \sin 4x - 4 \cos^2 2x = 0$.

1535. $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$.

1536. $8 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \sin x - 4 = 0$.

1537. $\sin x - \cos x - 4 \cos^2 x \cdot \sin x = 4 \sin^3 x$.

1538. $\sec x = 4 \sin x + 6 \cos x$.

1539. $\sin x + \cos x = \sec x + \operatorname{cosec} x$.

1540. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.

1541. $\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 0$.

Тригонометрические уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

1542. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$. Решить двумя способами: введением вспомогательного угла и подстановкой $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

1543. $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$. **1544.** $3\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 3$.

1545. $\sin x + 7\cos x = 5$. **1546.** $2\sin x - 3\cos x = \frac{1}{2}$.

1547. $\sqrt{3}\sin(x-45°) + \sin(x+45°) = \sqrt{2}$.

1548. $12\sin x + 4\sqrt{3}\cos(\pi + x) = \pi\sqrt{3}$.

Тригонометрические уравнения, решаемые преобразованием произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму

1549. $\sin(x+45°)\sin(x-15°) = \frac{1}{2}$.

1550. $2\sin x \cdot \sin 2x + \cos 3x = 0$.

1551. $\cos(x+70°)\cos(x+10°) = \sin 30°$.

1552. $\cos 7x \cdot \cos 3x = \cos 4x$.

1553. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6} = 0$.

1554. $2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{20}\right) = \cos\frac{2\pi}{5}$.

1555. $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$.

1556. $\sin(x+1)\cos 2(x+1) = \sin 3(x+1)\cos 4(x+1)$.

1557. $\sin\left(2x+\frac{3\pi}{20}\right)\sin\left(\frac{\pi}{20}-x\right) + \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{15}\right) = 0$.

1558. $\frac{\cos^2 x - \sin^2 2x}{4\cos^2 x} = \sin(x+30°)\sin(x-30°)$.

Тригонометрические уравнения, содержащие дробные члены

1559. Как решается тригонометрическое уравнение, которое имеет дробные члены, содержащие неизвестное в знаменателе? Почему найденные при решении такого уравнения корни подлежат обязательной проверке? Как осуществляется проверка корней в этом случае?

1560. Можно ли считать число $\frac{\pi}{2}$ корнем уравнения

$$\frac{\cos x}{1+\cos 2x} = 0?$$

1561. Равносильны ли уравнения:

1) $\frac{1+\sin 2x}{\cos x + \sin x} = 0$ и $1 + \sin 2x = 0$?

2) $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \operatorname{tg} x = 2$ и $(1 - 2\cos x)(1 + \sin x) = 0$?

Решить уравнения (задачи 1562 — 1581):

1562. $\frac{1-2\cos 2x}{\cos 2x-2}=0$. **1563.** $\frac{\sqrt{3}+\operatorname{ctg}5x}{\pi+3\sin 3x}=0$.

1564. $\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 5x}=0$. **1565.** $\frac{\operatorname{tg}\pi x}{\sin 0{,}5\pi x}=0$.

1566. $\sin x=\operatorname{tg}x$. **1567.** $\frac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x}=0$.

1568. $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}$. **1569.** $\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=0$.

1570. $\frac{1+\cos 2x}{\cos x}=0$. **1571.** $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos x}=\sec^2\frac{x}{2}-1$.

1572. $\frac{\sin x}{1+\cos x}=2-\operatorname{ctg}x$.

1573. $2\operatorname{ctg}(x-\pi)-(\cos x+\sin x)(\operatorname{cosec}x-\sec x)=4$.

1574. $\sin(\pi-x)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sec x-\cos x}{2\sin x}$.

1575. $\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}$. **1576.** $\sin x-\operatorname{tg}x=\sec x-\cos x$.

1577. $1-3\cos x+\cos 2x=\frac{\operatorname{cosec}(\pi-x)}{\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}x}$.

1578. $(\cos x+\sin x)^2+1=\frac{2\sin^2 x}{\sec^2 x-1}$.

1579. $\sec^2 x-\left(\cos x+\sin x\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin(x-30^\circ)+\cos(60^\circ-x)}{\cos x}$.

1580. $\sec^2 x=\frac{2-\sin x-\cos x}{1-\sin x}$.

1581. $\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}x}+\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x}=\frac{5}{2}$.

Системы тригонометрических уравнений

Решить системы уравнений (задачи 1582 — 1593):

1582. $x+y=\frac{\pi}{3}$; $\sin x+\sin y=1$.

1583. $x-y=60^\circ$; $\cos x+\cos y=1{,}5$.

1584. $x-y=\frac{\pi}{6}$; $\sin x-\cos y=\frac{1}{2}$.

1585. $x+y=\frac{5\pi}{6}$; $\cos^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{4}$.

1586. $x-y=60^\circ$; $\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=-\sqrt{3}$.

1587. $x-y=60^\circ$; $\sin^2 x-\sin^2 y=0{,}75$.

1588. $x+y=\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1$.

1589. $x-y=\frac{\pi}{3}$; $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}$.

1590. $x-y=10^\circ$; $\sin(x+10^\circ)\sin(y+20^\circ)=\frac{1}{2}$.

1591. $x+y=60^\circ$; $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=\frac{1}{3}$.

1592. $2^{\sin x+\cos y}=1$; $16^{\sin^2 x+\cos^2 y}=4$.

1593. $\sin x\cdot\sin y=0{,}75$; $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=3$.

Общий отдел

1594. Какие корни имеет функция $y=\sin\frac{1}{x}$? При каких значениях аргумента эта функция принимает значение, равное 1? — 1?

Решить уравнения (задачи 1595 — 1626):

1595. $\sin 5x\cdot\operatorname{ctg}x=0$. **1596.** $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$.

1597. $\frac{1-\sin x}{\operatorname{tg}x}=\cos x$.

1598. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\operatorname{tg}0{,}5+\operatorname{ctg}0{,}5x}{2\sqrt{2}}$.

1599. $8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=1+\sec x$. **1600.** $(1+\cos 4x)\sin 4x=\cos^2 2x$.

1601. $\operatorname{cosec}^2 x-\sec^2 x-\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x+3=0$

1602. $2\sin^2\frac{x}{2}+\cos 2x=0$. **1603.** $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos 2x=1$.

1604. $1-2\sin^2 8x=\sin 4x$. **1605.** $\sin^2 3x+\frac{1}{2}\sin^2 6x=1$.

1606. $2\cos(x+20^\circ)\cos x=\cos 40^\circ$.

1607. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

1608. $(\sin x+\cos x)^2=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

1609. $\sec x+1=\sin(\pi-x)-\cos x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi+x}{2}$.

1610. $\frac{\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}-2\sin(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x)=0$.

1611. $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$. **1612.** $|\sin x|=\frac{1}{2}$.

1613. $|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

1614. $\sin 2x\cdot\sin x+\cos^2 x=\sin 5x\cdot\sin 4x+\cos^2 4x$.

1615. $(\sin 2x+3)\sin^4 x-(\sin 2x+3)\sin^2 x+1=0$.

1616. $\sin 2x-2(2\sqrt{\sin x+\cos x}-3)(\sin x+\cos x)-$
$-4\sqrt{\sin x+\cos x}+2=0$.

1617. $\sin(\pi \operatorname{ctg} x) = \cos(\pi \operatorname{tg} x)$. **1618.** $\operatorname{tg}(\pi \sin x) = \operatorname{ctg}(\pi \cos x)$.

1619. $\sin(\pi \sin x) = \cos(\pi \sin x)$. **1620.** $\sin\left(\frac{5}{3}\pi \cos \pi x\right) = \frac{1}{2}$.

1621. $\sin(x - \alpha) = \sin x - \sin \alpha$.

1622. $\sin x + \sin(x - \alpha) = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$.

1623. $\frac{\sin mx}{\sin x} - \frac{\cos mx}{\cos x} = 0$, $m \neq 1$.

1624. $a(\sin x + \cos x)^2 = b \cos 2x$.

1625. $(a - 1)\cos x + (a + 1)\sin x = 2a$.

1626. $\operatorname{tg}(\alpha + x)\operatorname{tg}(\alpha - x) = \frac{1 - 2\cos 2\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha}$, $\alpha \neq \pi k \pm \frac{\pi}{3}$.

1627. Сумма двух равных высот равнобедренного треугольника равна третьей высоте. Найти углы треугольника.

1628. В квадрат вписан другой квадрат. Определить меньший угол между сторонами квадратов, если отношение площадей квадратов равно 1,5.

1629. Отношение периметра ромба к сумме его диагоналей равно m. Определить углы ромба. Вычислить углы ромба при $m = \sqrt{2}$.

Решить системы уравнений (задачи 1630 — 1632):

1630. $x - y = 150^\circ$; $\sin x \cdot \cos y = -0{,}25$.

1631. $x + y = \frac{\pi}{2}$; $\sin x : \sin y = \frac{1}{2}$.

1632. $x + y = \frac{\pi}{4}$; $\sin^2 x + \sin^2 y = 1$.

1633. Острые углы A и B прямоугольного треугольника связаны соотношением: $\sin A + \cos B = \operatorname{tg} A$. Определить эти углы.

1634. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\sin \gamma = \cos \gamma$; найти зависимость между α, β и γ.

1635. $\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$; найти зависимость между A и B.

Решить графически следующие уравнения (задачи 1636 — 1637):

1636. $\cos x = x$. **1637.** $\sin x = \frac{2}{\pi}|x - \pi|$.

1638. Проиллюстрировать на графике, что уравнение $\cos x = x^2 + 3$ не имеет корней.

1639. Проиллюстрировать на графике, что уравнение $\operatorname{tg} x = 2x - 1$ имеет бесконечно много корней.

1640. Сколько действительных корней имеет уравнение:

1) $\cos x = |x|$? 2) $x = \operatorname{tg} x$?

3) $2^x = \sin x$? 4) $x^2 - |\sin x| = 0$?

Решить уравнения (задачи 1641 — 1652):

1641. $2 \arcsin x = \pi$, **1642.** $\arccos(x^2 - 5x + 7) = 0$.

1643. $4 \operatorname{arc\,tg}(x^2-3x+3)-\pi=0$.

1644. $x=\operatorname{arc\,sin}(\sin x)$. **1645.** $\operatorname{arc\,sin} x=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}$.

1646. $\operatorname{arc\,sin} x=\frac{\pi}{3}+\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{2}$.

1647. $\operatorname{arc\,tg}(x+2)-\operatorname{arc\,tg}(x+1)=\frac{\pi}{4}$.

1648. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{4}$.

1649. $\operatorname{arc\,tg} x=2\operatorname{arc\,ctg} x$.

1650. $2\operatorname{arc\,sin} x=\operatorname{arc\,cos} 2x$.

1651. $2\operatorname{arc\,sin} x+\operatorname{arc\,cos}(1-x)=0$.

1652. $\operatorname{arc\,sin} mx=\operatorname{arc\,cos} nx$.

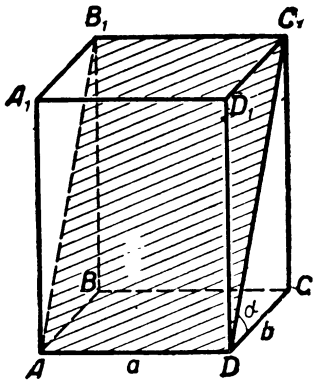
ГЛАВА X

ПРИЛОЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ И ИССЛЕДОВАНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

(стереометрия) *

§ 27. Параллелепипед

1653. Три ребра, выходящие из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, образуют с его диагональю углы α, β и γ; Доказать: 1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.



Черт. 59.

1654. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через одну из сторон нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол α. Определить площадь сечения (черт. 59). Решение исследовать **.

---

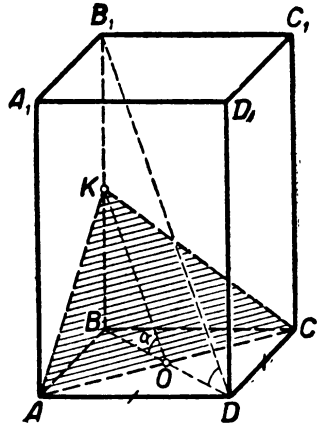
* Решать в течение всего года.

** Т. е. 1) определить область чисел, которой должно принадлежать решение, и границы, в которых оно должно заключаться; 2) установить границы возможного изменения параметров; 3) выяснить, как изменится полученный ответ при том или ином изменении данных, входящих в условие, в частности определить, имеет ли искомая величина наибольшее и наименьшее значения, каковы эти значения и когда (т. е. при каких значениях параметров) они достигаются; 4) проследить за изменением формы рассматриваемой фигуры в связи с изменением параметров и проверить справедливость формулы в предельных случаях.

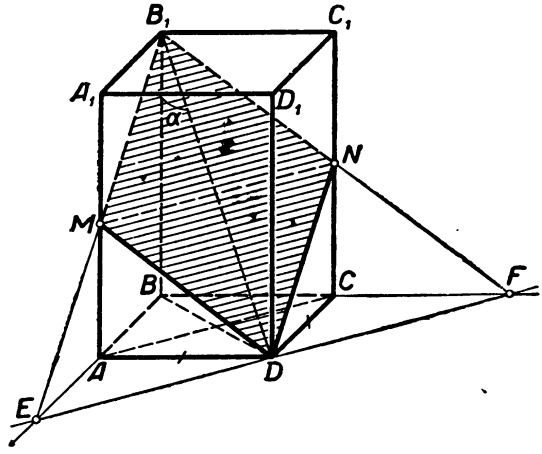
1655. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной a. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и пересекающей противоположную боковую грань параллелепипеда. Определить периметр сечения, если плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом α. Решение исследовать.

1656. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, диагонали которого равны m и n. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания параллелепипеда и через противолежащую вершину верхнего основания его. Определить площадь сечения, зная, что угол между секущей плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда равен α. Решение исследовать.

1657. Построить сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно диагонали параллелепипеда. Определить площадь сечения, если основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной a, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α (черт. 60). Вычислить площадь сечения при $a = 135$, $\alpha = 50°10'$.



Черт. 60.

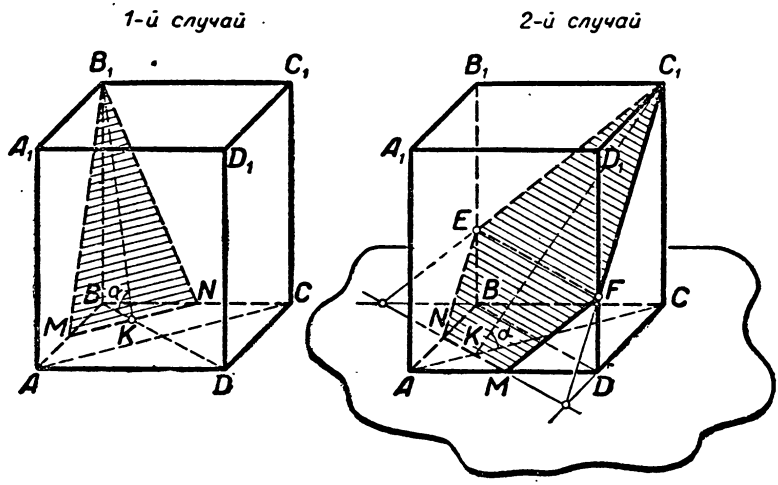


Черт. 61.

1658. В прямоугольном параллелепипеде, основанием которого является квадрат со стороной a, провести плоскость через диагональ параллелепипеда параллельно диагонали основания. Определить площадь образовавшегося при этом сечения, если диагональ параллелепипеда образует с его боковым ребром угол α (черт. 61).

1659. Построить сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершину верхнего основания и середины двух смежных сторон нижнего основания (два случая).

Определить площадь сечения, если основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной a и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен α (черт. 62).



Черт. 62.

1660. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом $A = \alpha$. Боковое ребро $AA_1 = 2a$ и наклонено к плоскости основания под углом α. Определить площади диагональных сечений, если большее из них перпендикулярно плоскости основания.

1661*.[1] Периметр основания прямоугольного параллелепипеда равен p, угол между диагоналями основания α. Через меньшую сторону основания параллелепипеда и середину отрезка, соединяющего точки пересечения диагоналей оснований, проведена плоскость. Определить площадь полученного сечения, зная, что плоскость сечения образует с основанием параллелепипеда угол β. Вычислить площадь сечения при $p = 45{,}85$ *м*, $\alpha = 71°20'$, $\beta = 52°28'$.

1662*. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания равна d и составляет угол α с большей стороной основания. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, которая наклонена к плоскости нижнего основания под углом β.

Определить боковую поверхность параллелепипеда и вычислить её при $d = 54{,}75$; $\alpha = 18°32'$; $\beta = 33°18'$.

1663. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и наклонена к плоскости основания под углом β; угол между стороной и диагональю основания равен α. Определить объём

[1] Звёздочкой отмечены задачи, предлагавшиеся на экзаменах на аттестат зрелости.

параллелепипеда и вычислить его при $d = 17{,}9$ *см*; $\alpha = 21°30'$ и $\beta = 54°20'$.

1664. Определить объём прямоугольного параллелепипеда, зная его высоту h и углы α и β, которые образуют с основанием диагональ параллелепипеда, и диагональ его боковой грани. Вычислить объём при $h = 20{,}41$ *дм*; $\alpha = 31°18'$; $\beta = 52°09'$.

1665. Высота прямоугольного параллелепипеда равна h, а его диагональ составляет с основанием угол α. Определить объём параллелепипеда, если угол между диагоналями его основания равен β. Вычислить объём при $h = 0{,}708$ *м*; $\alpha = 37°15'$; $\beta = 112°50'$.

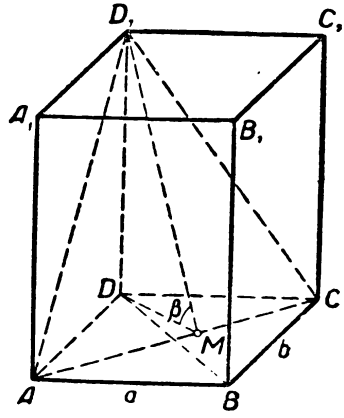
1666. Стороны основания прямого параллелепипеда равны a и b, угол между диагоналями основания равен α, и угол между диагоналями боковой грани, противолежащей стороне a, равен β. Определить объём параллелепипеда и вычислить его при $a = 197{,}6$ *см*; $b = 235{,}8$ *см*, $\alpha = 29°49'$; $\beta = 67°29'$.

1667. Определить объём прямоугольного параллелепипеда, зная углы α и β, которые образуют диагональная плоскость и диагональ d, в ней лежащая, с одной и той же боковой гранью. Вычислить объём параллелепипеда при $d = 23{,}06$ *дм*; $\alpha = 38°17'$; $\beta = 27°34'$.

1668. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α. Ребро AA_1 равно b и образует с рёбрами AB и AD углы, каждый из которых равен β. Определить объём параллелепипеда и вычислить его при $a = 24{,}37$ *дм*; $b = 46{,}87$ *дм*; $\alpha = 46°38'$; $\beta = 39°56'$.

1669. Определить объём наклонного параллелепипеда, если известно, что площади двух его боковых граней p и q, их общее ребро a и двугранный угол между ними α.

1670. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершины A, C и D_1 проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Найти объём параллелепипеда, если стороны основания его равны a и b (черт. 63). Вычислить объём при $a = 36{,}02$ *дм*; $b = 60{,}08$ *дм*; $\beta = 72°09'$.

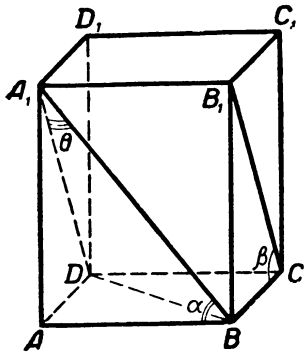


Черт. 63.

1671. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Определить объём и боковую поверхность параллелепипеда, если его диагонали составляют с плоскостью основания углы α и β ($\alpha > \beta$), а высота параллелепипеда равна h. Вычислить объём при $h = 0{,}18$ *м*; $\alpha = 55°$; $\beta = 39°$.

1672. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью угол β.

Высота параллелепипеда равна H. Определить объём параллелепипеда и вычислить его при $H = 123{,}8$; $\alpha = 34°34'$; $\beta = 40°11'$.



Черт. 64.

1673. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограм с тупым углом α и сторонами a и b. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Определить объём параллелепипеда. Решение исследовать.

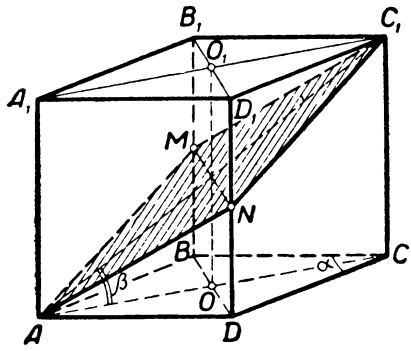
1674. Углы между диагоналями прямоугольного параллелепипеда равны α и β, причём первый угол лежит между диагоналями, выходящими из противоположных вершин основания. Определить объём параллелепипеда, если высота его равна H.

1675. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β (черт. 64). Найти угол θ между этими диагоналями.

§ 28. Призма

1676. В правильной треугольной призме провести сечение, проходящее через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Определить площадь сечения, если сторона основания равна a и плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом α. Решение исследовать.

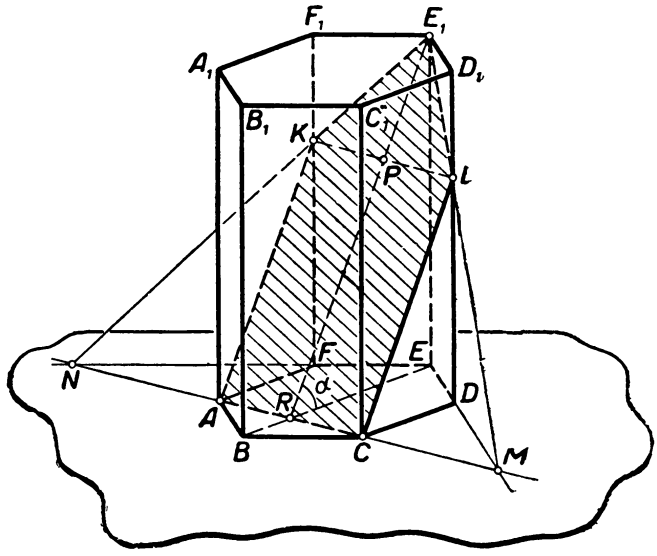
1677. Основанием прямой призмы служит ромб, меньшая диагональ которого равна m, и острый угол α. Бо́льшая диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом β (черт. 65). Построить секущую плоскость, проходящую через большую диагональ призмы параллельно диагонали основания, и найти площадь образовавшегося при этом сечения. Решение исследовать.



Черт. 65.

1678. Дана правильная шестиугольная призма, сторона основания которой равна a (черт. 66). Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания AC и через вершину верхнего основания E_1. Определить площадь сечения, если угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен α. Решение исследовать.

1679. В правильной треугольной призме проведена плоскость через сторону нижнего основания и через середину противоположного бокового ребра. Площадь полученного сечения равна q, а угол при его вершине α. Определить боковую поверхность призмы и вычислить её при $q = 25{,}4$ $см^2$; $\alpha = 12°10'$.



Черт. 66.

1680. Высота правильной четырёхугольной призмы равна H. Через концы трёх рёбер, выходящих из одной вершины, проведена плоскость, образующая с основанием призмы угол α. Найти боковую поверхность призмы и вычислить её при $H = 10{,}7$ $м$ и $\alpha = 55°30'$.

1681. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого c, а один из острых углов α. Диагональ боковой грани, проходящей через катет, противолежащий углу α, наклонена к основанию под углом $\frac{\alpha}{2}$. Определить полную поверхность призмы и вычислить её при $c = 10{,}05$ $м$ и $\alpha = 36°52'$.

1682. Высота правильной треугольной призмы равна H. Прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. Найти полную поверхность призмы и вычислить её при $H = 28{,}25$ $м$; $\alpha = 63°34'$.

1683. Высота правильной четырёхугольной призмы равна H. Прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости нижнего основания под углом β. Найти полную поверхность призмы и вычислить её при $H = 0{,}08$ $м$ и $\beta = 50°$.

1684. Определить полную поверхность прямой четырёхугольной призмы, у которой каждое ребро равно a, а угол основания равен α. Решение исследовать.

1685. Определить объём прямой призмы, у которой основанием служит равнобедренный треугольник с углом α при вершине и противолежащей стороной b, если диагональ одной из равных боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β. Вычислить объём при $\alpha = 48°30'$; $\beta = 36°20'$; $b = 25{,}6$ *м*.

1686. Через сторону основания, равную a, правильной четырёхугольной призмы провести сечение, равновеликое боковой грани. Найти объём призмы и угол φ сечения с плоскостью основания, если диагональ сечения образует с основанием сечения угол α. Вычислить объём при $a = 14{,}05$ *дм*; $\alpha = 59°11'$.

1687. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Меньшая диагональ призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объём призмы и вычислить его при $d = 20{,}4$ *м*; $\alpha = 37°40'$; $\beta = 65°20'$.

1688. Высота правильной треугольной призмы равна h, а сечение, проведённое через сторону основания и середину бокового ребра, наклонено к основанию под углом α. Определить объём и полную поверхность призмы. Вычислить объём при $h = 20{,}08$; $\alpha = 27°12'$.

1689. Боковое ребро прямой треугольной призмы равно b, через сторону AC основания ABC проведено сечение ADC, площадь которого равна q. Найти объём призмы, если плоскость сечения образует с плоскостью основания угол β.

1690. Боковое ребро наклонной призмы равно b, а площадь её основания равна S. Определить объём призмы, если известно, что плоскость, перпендикулярная к боковым рёбрам призмы, образует с плоскостью основания угол α.

1691*. Основанием прямой призмы служит равнобедренный $\triangle ABC\,(AB = AC)$, периметр которого равен $2p$ и угол при вершине A равен α. Через сторону BC нижнего основания и противолежащую вершину A_1 верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол β. Определить объём призмы и вычислить его при $p = 23{,}75$ *см*; $\alpha = 47°32'$; $\beta = 55°20'$.

1692. Боковое ребро a треугольной призмы образует с плоскостью основания угол γ. Радиус окружности, описанной около основания, равен R, два угла основания равны α и β. Найти объём призмы и вычислить его при $a = 9{,}013$; $R = 5{,}817$; $\alpha = 52°16'$; $\beta = 87°20'$; $\gamma = 75°23'$.

1693. Основанием призмы служит правильный треугольник, описанный около окружности радиуса r. Одна из вершин призмы проектируется в центр основания. Боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол α. Найти объём данной призмы и вычислить его при $r = 21{,}56$ *см*; $\alpha = 63°27'$.

1694. В наклонной призме основание — равнобедренный треугольник, каждая из равных сторон которого равна b, а угол между ними равен 2α. Боковое ребро призмы равно радиусу окружности, вписанной в основание, и составляет с его плоскостью угол α. Определить объём призмы и вычислить его при $b = 2{,}74$ *дм*; $\alpha = 26°30'$.

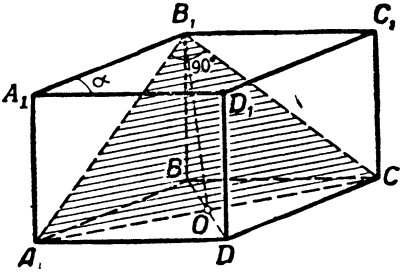
1695. Определить объём прямой треугольной призмы, зная, что основание её — прямоугольный треугольник, радиус окружности, описанной около основания, равен R и диагонали наибольшей и наименьшей боковых граней составляют с основанием углы α и 2α.

1696. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно a; одно из боковых рёбер образует с каждой прилежащей стороной основания угол α. Определить объём призмы. Решение исследовать.

1697. Основанием наклонной призмы служит равнобедренный треугольник. Боковая грань призмы, проходящая через основание a равнобедренного треугольника, — квадрат и образует с двумя другими боковыми гранями углы, каждый из которых равен α. Определить объём призмы и вычислить его при $a = 44{,}5$ *см* и $\alpha = 36°20'$.

1698. Основание прямой призмы служит прямоугольник. Определить боковую поверхность и объём призмы, если диагональ призмы, равная m, составляет с боковыми гранями соответственно углы α и β. Решение исследовать.

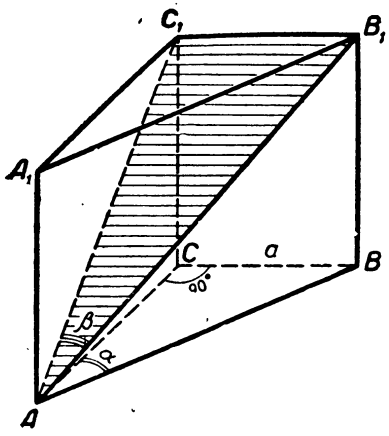
1699. Основанием прямой призмы служит ромб, периметр которого равен P, а острый угол α. Сечение, проведённое через бо́льшую диагональ одного основания и вершину тупого угла другого основания, представляет собой прямоугольный треугольник (черт. 67). Определить объём призмы и вычислить его при $P = 440{,}3$; $\alpha = 34°15'$.



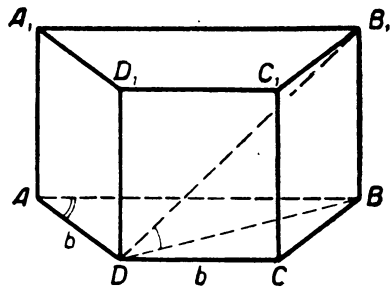
Черт. 67.

1700. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при точке C, в котором даны катет $BC = a$ и угол $A = \alpha$. Через точки A, B_1 и C_1 проведена плоскость, образующая в сечении угол B_1AC_1, равный β (черт. 68). Найти объём призмы. Решение исследовать.

1701. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом A и боковой стороной b, равной меньшему основанию. Определить объём призмы, если угол между диагональю призмы и диагональю трепеции равен $\frac{A}{2}$ (черт. 69). Вычислить объём при $b = 4{,}84$ и $A = 54°40'$.



Черт. 68.



Черт. 69.

1702*. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, в котором острый угол равен β. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра, равного b, проведена плоскость. Зная, что эта плоскость образует с плоскостью основания угол α, найти боковую поверхность треугольной призмы, отсекаемой проведенной плоскостью от данного параллелепипеда. Вычислить боковую поверхность призмы при $b = 12{,}6$ *дм*; $\alpha = 56°10'$; $\beta = 47°40'$.

1703. Правильная четырёхугольная призма пересечена плоскостью так, что в сечении получился ромб с острым углом α. Найти угол β плоскости сечения с плоскостью основания призмы.

1704. Найти сторону основания правильной треугольной призмы, объём которой равен v, если угол между диагоналями двух граней, проведёнными из одной и той же вершины, равен β.

§ 29. Пирамида

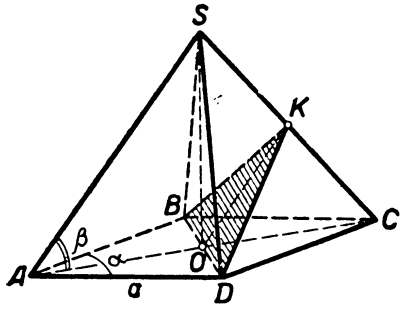
Сечения пирамиды

1705. В правильной треугольной пирамиде провести сечение через одну из сторон основания перпендикулярно к противолежащему боковому ребру. Определить площадь сечения, если сторона основания равна a и боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Решение исследовать.

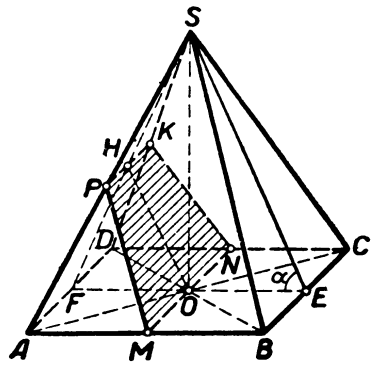
1706. Основанием пирамиды служит ромб, вершина её проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через меньшую диагональ ромба параллельно боковому ребру пирамиды. Определить площадь сечения, если сторона ромба равна a, острый угол его равен α, а большее боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол β (черт. 70). Исследовать решение.

1707. В правильной четырёхугольной пирамиде провести сечение через центр основания параллельно боковой грани.

Определить площадь сечения, если известно, что сторона основания пирамиды равна a и боковая грань её наклонена к плоскости основания под углом α (черт. 71). Решение исследовать.



Черт. 70.



Черт. 71.

1708. Основанием пирамиды служит параллелограм. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды параллельно её основанию. Определить площадь сечения, если острый угол параллелограма равен α, а одна из диагоналей, равная d, перпендикулярна к стороне параллелограма.

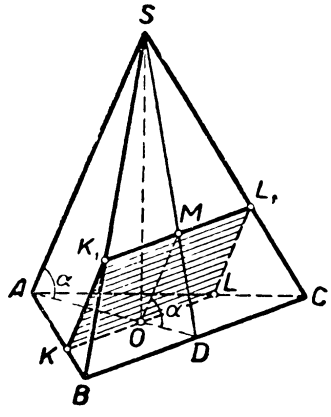
1709. Построить сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно одной из боковых граней пирамиды. Определить площадь сечения, если боковая грань пирамиды наклонена к плоскости её основания под углом α, а сторона основания пирамиды равна a.

1710. Построить сечение правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону её основания и делящей пополам двугранный угол при основании пирамиды. Определить площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна a и двугранный угол при основании парамиды равен 2α.

1711. В правильной четырёхугольной пирамиде через сторону основания под углом β к нему проведена плоскость. Определить площадь полученного сечения, если апофема пирамиды равна a и боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Вычислить площадь сечения при $a=10{,}75$ *дм*; $\alpha=62°35'$; $\beta=39°45'$.

1712. Построить сечение правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру. Определить площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна b, а боковое ребро образует с высотой пирамиды угол β. Решение исследовать.

1713. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, плоский угол при её вершине γ. Через вершину основания пирамиды проведена плоскость перпендикулярно к противоположному боковому ребру. Определить диагонали сечения.



Черт. 72.

Правильная четырёхугольная пирамида

1714. Через центр основания правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой a, проведено сечение параллельно двум непересекающимся рёбрам пирамиды SA и BC (черт. 72). Определить площадь сечения, если боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол α.

1715. В правильной четырёхугольной пирамиде площадь диагонального сечения равна S; сторона основания равна a. Определить двугранный угол при основании и вычислить его при $S=320{,}7$ кв. ед.; $a=27{,}3$ ед.

1716. Радиус окружности, описанной около основания правильной четырёхугольной пирамиды, равен R; плоский угол при основании α. Определить боковую поверхность пирамиды и двугранный угол при основании x.

1717. Найти полную поверхность правильной четырёхугольной пирамиды, если её боковое ребро b, а угол между боковым ребром и стороной основания равен α. Решение исследовать.

1718. Центр основания правильной четырёхугольной пирамиды удалён от боковой грани на расстояние a. Определить полную поверхность этой пирамиды, если боковая грань образует с плоскостью основания угол α, и вычислить её при $a=2{,}55$ $м$; $\alpha=67°50'$.

1719. Полная поверхность правильной четырёхугольной пирамиды равна T. Двугранный угол при основании равен β. Найти сторону основания и вычислить её при $T=2389$ $дм^2$; $\beta=48°15'$.

1720. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна m; боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Определить боковую поверхность и объём пирамиды.

1721. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды составляет с основанием угол α, а середина его удалена от основания пирамиды на расстояние a. Определить объём пирамиды и вычислить его при $a=25{,}7$ и $\alpha=56°20'$.

1722. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен V, а угол наклона плоскости боковой грани к плоскости основа-

ния пирамиды равен α. Определить полную поверхность пирамиды и вычислить её при $V=24{,}08$ *дм*^{3} и $\alpha=72°25'$

1723. Определить полную поверхность и объём правильной четырёхугольной пирамиды, зная площадь круга Q, вписанного в её основание, и угол β наклона боковой грани к плоскости основания. Вычислить объём пирамиды при $Q=2{,}777$ *м*^{2} и $\beta=66°33'$.

1724. Определить полную поверхность и объём правильной четырёхугольной пирамиды, зная длину окружности C, описанной около её основания, и угол γ между высотой и боковым ребром пирамиды.

1725. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r. Решение исследовать.

1726. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, зная угол α при вершине её диагонального сечения и радиус R окружности, описанной около него. Вычислить объём при $R=19{,}61$ *м* и $\alpha=105°17'$.

Правильная треугольная пирамида

1727. Апофема правильной треугольной пирамиды равна a, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Найти боковую поверхность пирамиды и вычислить её при $a=81{,}37$ *дм* и $\alpha=61°21'$.

1728. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность пирамиды. Решение исследовать.

1729. Площадь круга, описанного около основания правильной треугольной пирамиды, равна K, а плоский угол при вершине равен α. Определить полную поверхность пирамиды.

1730. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α; длина окружности, вписанной в основание пирамиды, равна C. Определить полную поверхность пирамиды.

1731. Определить полную поверхность правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при основании боковой грани равен α, а радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r. Вычислить полную поверхность пирамиды при $r=10{,}05$ и $\alpha=73°12'$.

1732. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна b, а высота образует с боковой гранью угол β. Определить объём пирамиды.

1733. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, плоский угол при вершине α. Определить объём и боковую поверхность пирамиды. Решение исследовать.

1734. Определить объём правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R. Решение исследовать.

Правильная многоугольная пирамида

1735. Определить полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, высота которой равна h, а боковая грань наклонена к плоскости основания пирамиды под углом α.

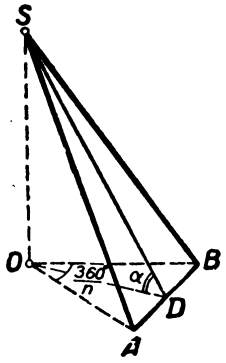
1736. Определить боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если расстояние центра основания пирамиды до середины бокового ребра равно d, а плоский угол при вершине 2α. Решение исследовать.

1737. В правильной шестиугольной пирамиде сумма апофемы пирамиды и апофемы её основания равна m. Определить боковую поверхность пирамиды, если плоский угол при вершине равен α. Решение исследовать.

1738. Основанием правильной пирамиды является пятиугольник. Сумма апофемы этого многоугольника и апофемы пирамиды равна m. Боковые грани пирамиды наклонены к её основанию под углом α. Найти боковую поверхность пирамиды.

1739. Определить полную поверхность правильной n-угольной пирамиды по стороне основания a и углу наклона боковой грани к основанию α. Вычислить полную поверхность при $n = 11$; $a = 12{,}12$; $\alpha = 17°51'$.

1740. Определить объём правильной шестиугольной пирамиды, если даны апофема её a и двугранный угол при основании α. Вычислить объём при $a = 3{,}56$ *дм* и $\alpha = 48°50'$.



Черт. 73.

1741. Определить полную поверхность и объём правильной n-угольной пирамиды, если даны апофема её a и угол наклона боковой грани к плоскости основания α (черт. 73). Вычислить полную поверхность при $a = 10$ *см*, $\alpha = 70°$ и $n = 15$.

1742. В правильной n-угольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Определить объём пирамиды, если расстояние от центра основания пирамиды до бокового ребра равно d.

1743. Определить объём и полную поверхность правильной n-угольной пирамиды по стороне основания a и плоскому углу при вершине α.

1744. Определить объём правильной n-угольной пирамиды, если её боковая поверхность равна S и двугранный угол при основании равен α.

Неправильная пирамида

1745. Одно боковое ребро пирамиды, основанием которой служит квадрат, перпендикулярно к плоскости основания. Определить объём этой пирамиды, если наибольшее её боковое ребро, равное b, наклонено к плоскости основания под углом α. Вычислить объём пирамиды при $b = 0{,}73$ и $\alpha = 39°18'$.

1746. Основанием пирамиды служит квадрат; две боковые грани этой пирамиды перпендикулярны к плоскости основания; две другие её боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы, каждый из которых равен α. Высота пирамиды равна H. Определить боковую поверхность пирамиды и вычислить её при $H = 24{,}15$; $\alpha = 53°46'$.

1747. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник ABC, у которого катет $AC = b$ и $\angle B = \beta$. Боковые грани пирамиды, проходящие через катеты AC и BC, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань образует с плоскостью основания угол γ. Определить объём пирамиды.

1748. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при точке C; ребро $AD = a$ и перпендикулярно к основанию; рёбра AD и BD составляют с ребром CD углы α и β. Определить объём пирамиды и расстояние от точки B до плоскости ADC. Вычислить объём при $a = 136{,}7$; $\alpha = 39°06'$; $\beta = 50°17'$.

1749. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна b, а угол при вершине β. Определить объём пирамиды, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно к основанию, а два других составляют с ним угол γ. Вычислить объём при $b = 15{,}0$ *см*; $\beta = 130°10'$; $\gamma = 26°20'$.

1750. Определить объём и боковую поверхность пирамиды, зная, что высота её равна h, основание — правильный треугольник, две боковые грани перпендикулярны к основанию, а третья составляет с ним угол α. Вычислить боковую поверхность при $h = 8{,}85$ и $\alpha = 45°50'$.

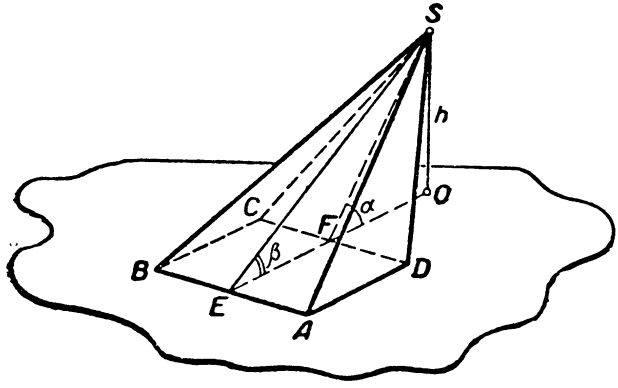
1751. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен b, а прилежащий к нему острый угол α. Вершина пирамиды расположена на перпендикуляре, восставленном из вершины прямого угла треугольника к его плоскости, и удалена от гипотенузы на расстояние, равное b. Определить объём пирамиды.

1752. Определить объём пирамиды, зная, что высота её h лежит вне пирамиды, а две противоположные грани — равнобедренные треугольники, составляющие с её квадратным основанием углы α и β ($\alpha > \beta$) (черт. 74). Вычислить объём при $h = 52{,}36$; $\alpha = 72°43'$; $\beta = 24°50'$.

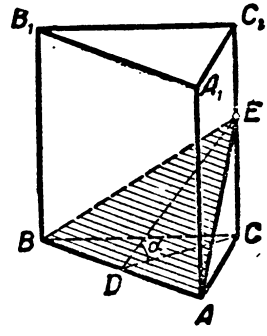
1753*. Через сторону a нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом α к плоскости основания (черт. 75). Найти боковую поверхность образовавшейся при этом пирамиды. Решение исследовать.

1754*. Плоскость, проходящая через диагональ основания правильной четырёхугольной призмы и наклонённая к плоскости основания под углом α, пересекает боковое ребро призмы на расстоянии H от основания. Определить объём

и боковую поверхность образовавшейся при этом пирамиды, приняв за вершину пирамиды точку пересечения бокового ребра призмы с плоскостью сечения.



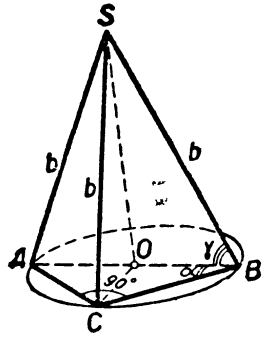
Черт. 74.



Черт. 75.

Вершина пирамиды проектируется в центр описанной окружности

1755. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Каждое боковое ребро равно b и наклонено к плоскости основания под углом γ (черт. 76). Определить объём пирамиды и вычислить его при $b = 7{,}04$ *дм*; $\alpha = 42°10'$; $\gamma = 46°10'$.



Черт. 76.

1756. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой a и острым углом α. Вычислить объём пирамиды и наибольший плоский угол при её вершине, если каждое боковое ребро образует с плоскостью основания пирамиды угол β ($a = 43{,}08$ *м*; $\alpha = 28°11'$; $\beta = 70°56'$).

1757. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, диагональ которой составляет с боковой стороной прямой угол, большее основание трапеции равно a, острый угол α. Найти объём пирамиды, если боковое ребро, соединяющее вершину пирамиды с концом меньшего основания трапеции, образует с плоскостью основания угол β, а вершина пирамиды проектируется на середину большего основания трапеции. Вычислить объём при $a = 19{,}75$; $\alpha = 42°41'$; $\beta = 24°20'$.

1758. Найти объём пирамиды, основанием которой служит прямоугольный треугольник с катетами a и b, если каждое боковое ребро её наклонено к плоскости основания под углом α.

1759. Основанием пирамиды служит треугольник, два угла

которого равны α и β. Высота пирамиды равна h, а боковые рёбра её наклонены к плоскости основания под углом φ. Определить объём пирамиды и вычислить его при $\alpha = 37°43'$; $\beta = 67°18'$; $\varphi = 58°32'$; $h = 50{,}03$ *см*.

1760. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b и составляют угол α. Боковые рёбра пирамиды образуют с её высотой угол β. Определить объём пирамиды и вычислить его при $b = 30{,}04$ *см*; $\alpha = 20°20'$; $\beta = 31°31'$.

Вершина пирамиды проектируется в центр вписанной окружности

1761. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при основании α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Определить ребро куба, равновеликого этой пирамиде.

1762. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при вершине α. Из вершины пирамиды любой диаметр окружности, вписанной в основание пирамиды, виден под углом β. Определить расстояние от вершины пирамиды до сторон основания.

1763. Основанием пирамиды служит треугольник, одна сторона которого b, а прилежащие к ней углы α и β. Определить высоту пирамиды, если каждая её боковая грань наклонена к плоскости основания под углом φ.

1764. Периметр и площадь основания треугольной пирамиды соответственно равны $2p$ и S. Определить объём пирамиды, если её высота образует с каждой боковой гранью угол β.

Применение теоремы о площади проекции плоской фигуры

1765. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна l, а двугранный угол при основании α. Определить боковую поверхность пирамиды.

1766. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого a и b. Определить боковую поверхность пирамиды, если все её боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α.

1767. Боковая поверхность правильной пирамиды равна S, а площадь её основания B. Найти угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания.

1768. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник. Две боковые грани пирамиды, проходящие через катеты треугольника, лежащего в её основании, перпендикулярны к основанию, а третья грань, площадь которой равна Q, наклонена к основанию под углом α. Определить объём пирамиды, если её высота равна H.

1769. Боковая поверхность правильной шестиугольной пирамиды равна S, а двугранный угол при основании равен φ. Определить объём пирамиды.

1770. Площадь боковой грани правильной четырёхугольной пирамиды равна Q. Определить объём пирамиды, если боковая грань её образует с плоскостью основания угол α. Вычислить объём при $Q = 12{,}84$ *м*^{2}; $\alpha = 72°15'$.

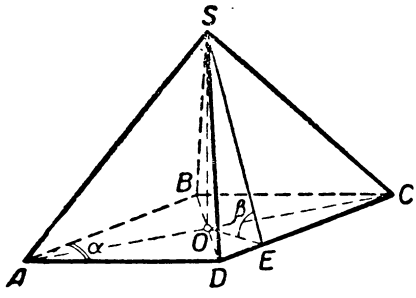
1771. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого c, а острый угол α. Каждая из боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β. Определить полную поверхность пирамиды и вычислить её при $c = 12{,}31$ *см*; $\alpha = 42°15'$; $\beta = 73°08'$.

1772. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого угол между равными сторонами равен α, а противоположная ему сторона a. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом β. Определить полную поверхность пирамиды и вычислить её при $a = 203{,}5$; $\alpha = 54°22'$; $\beta = 68°06'$.

1773. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с острым углом β и высотой h, проведённой из вершины прямого угла к гипотенузе. Двугранные углы при основании φ. Определить боковую и полную поверхность пирамиды. Вычислить боковую поверхность при $\beta = 48°12'$; $\varphi = 58°12'$; $h = 35{,}06$.

1774. В правильной n-угольной пирамиде площадь основания равна Q, а высота составляет с боковой гранью угол φ. Определить полную поверхность пирамиды.

1775. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α и стороной a. В пирамиде проведено сечение через середину высоты параллельно основанию. Определить боковую поверхность образовавшейся при этом усечённой пирамиды, если каждая её боковая грань образует с плоскостью основания угол α.



Черт. 77.

1776*. Основанием четырёхугольной пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого равна d, а острый угол α. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β (черт. 77). Определить полную поверхность пирамиды и вычислить её при $d = 10{,}3$; $\alpha = 30°30'$; $\beta = 60°40'$.

1777. Основанием пирамиды служит параллелограм, площадь которого равна Q. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей параллелограма. Одна из боковых граней составляет с плоскостью основания угол α, дру-

гая.— угол β. Найти боковую поверхность пирамиды. Решение исследовать.

1778. В правильной треугольной пирамиде двугранные углы при основании равны β. Определить полную поверхность пирамиды, если её объём равен V.

Зависимость между плоскими углами пирамиды и углами наклона её рёбер и граней к плоскости основания

1779. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Определить величину двугранного угла при основании.

1780. Боковая поверхность правильной четырёхугольной пирамиды равна S; плоский угол при вершине α. Определить полную поверхность пирамиды и вычислить её при

$$S = 123{,}8 \ дм^2; \ \alpha = 28°36'.$$

1781. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а плоский угол при вершине α.

1782. Найти объём правильной треугольной пирамиды по высоте h и плоскому углу при вершине α.

1783. Определить объём правильной треугольной пирамиды, зная плоский угол α при вершине и расстояние d её боковой грани от вершины основания.

1784. В правильной n-угольной пирамиде боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Под каким углом к плоскости основания наклонено боковое ребро пирамиды?

1785. Определить боковую поверхность правильной четырёхугольной пирамиды, боковое ребро которой наклонено к плоскости основания под углом β, а диагональ основания равна m. Решение исследовать.

1786. Определить боковую поверхность правильной четырёхугольной пирамиды, зная двугранный угол α при основании и расстояние a бокового ребра от вершины основания (два случая).

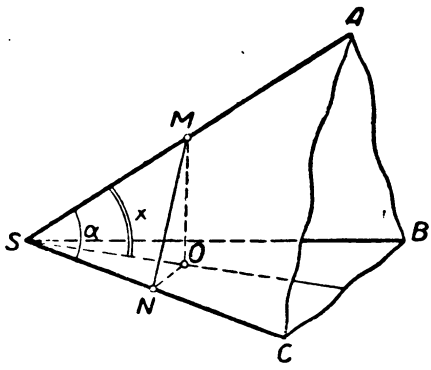
1787. Определить плоский угол θ при вершине правильной n-угольной пирамиды, если боковое ребро её наклонено к плоскости основания под углом α.

1788. Определить объём правильной треугольной пирамиды, плоский угол при вершине которой равен θ, а площадь круга, описанного около основания, равна K.

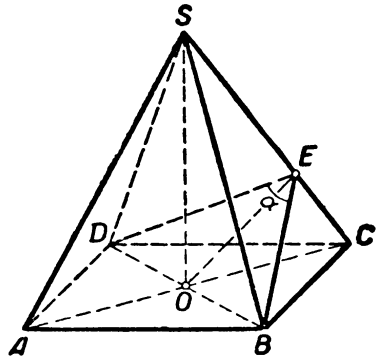
1789. Каждый плоский угол трёхгранного угла равен α ($3\alpha < 4d$). Установить зависимость между углом α и углом x, под которым ребро трёхгранного угла наклонено к плоскости его грани (черт. 78).

1790. Боковые рёбра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину, равную b. Из трёх плоских углов, образовавшихся

при вершине пирамиды этими рёбрами, два равны a, а третий равен β. Найти объём пирамиды. Решение исследовать.



Черт. 78.



Черт. 79.

Угол между смежными боковыми гранями пирамиды

1791. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Определить величину двугранного угла между смежными боковыми гранями.

1792. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, в которой даны сторона основания a и двугранный угол между боковыми гранями α (черт. 79). Решение исследовать.

1793. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а двугранный угол между смежными боковыми гранями равен β. Решение исследовать.

1794. В правильной четырёхугольной пирамиде угол между смежными боковыми гранями равен φ, а площадь сечения, проходящего через диагональ основания и перпендикулярно к боковому ребру пирамиды, равна q. Определить боковую поверхность пирамиды и вычислить её при $q=13{,}2$ $м^2$ и $\varphi = 108°$.

1795. Сторона основания правильной треугольной пирамиды a и угол между боковыми гранями φ. Определить боковую поверхность пирамиды. Решение исследовать.

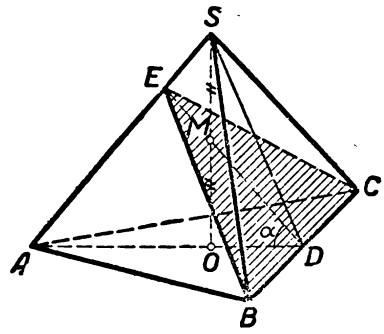
1796. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, зная двугранный угол α между боковыми её гранями и расстояние a от центра основания до бокового ребра. Решение исследовать.

1797. Высота правильной треугольной пирамиды равна H, двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Определить объём пирамиды. Решение исследовать.

1798. В правильной n-угольной пирамиде сторона основания равна $2a$, двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Определить объём пирамиды.

1799. Определить объём и боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, зная, что плоскость, проходящая через сторону a основания и середину её высоты, наклонена к основанию под углом α (черт. 80). Решение исследовать.

1800*. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна h и образует с боковой гранью угол α. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей боковой грани и пересекающая её. Найти объём пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от данной пирамиды. Вычислить объём пирамиды при $h = 7{,}125$; $\alpha = 27°10'$.

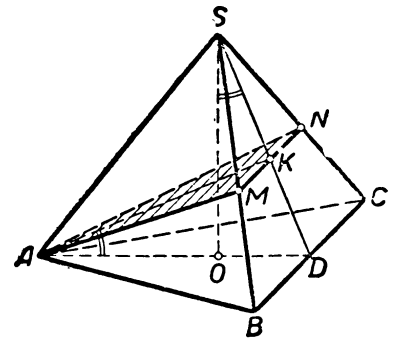


Черт. 80.

1801*. В правильной четырёхугольной пирамиде проведено сечение через вершину пирамиды параллельно одной из сторон основания под углом α к плоскости основания. Зная, что сторона основания пирамиды равна a, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен β, найти объём каждой из пирамид, на которые секущая плоскость разбивает данную правильную пирамиду. Вычислить объём той из указанных в условии задачи пирамид, у которой один из двугранных углов при основании равен α, если $a = 2{,}375$ *м*, $\alpha = 75°42'$, $\beta = 61°32'$.

1802. Через вершину основания правильной треугольной пирамиды под углом α к нему проведено сечение, параллельное противолежащей стороне основания и перпендикулярное противолежащей боковой грани (черт. 81). Определить объём пирамиды, зная её апофему a.

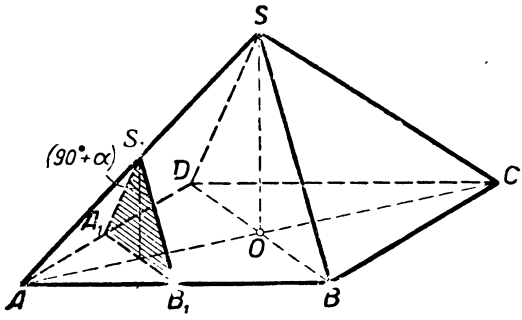
1803. Сечение, проведённое через середину бокового ребра и диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды, составляет угол α с диагональной плоскостью, проходящей через ту же диагональ. Определить объём пирамиды и площадь сечения, зная высоту h пирамиды. Вычислить площадь сечения при $h = 34{,}5$ *дм* и $\alpha = 23°10'$.



Черт. 81.

1804. Сторона сечения, проведённого через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды параллельно основанию, равна a, а сечение, проведённое через ту же точку

бокового ребра и сторону основания, составляет с первым сечением угол α. Определить объём пирамиды и вычислить его при $a = 44{,}3$ *см* и $\alpha = 25°20'$.



Черт. 82.

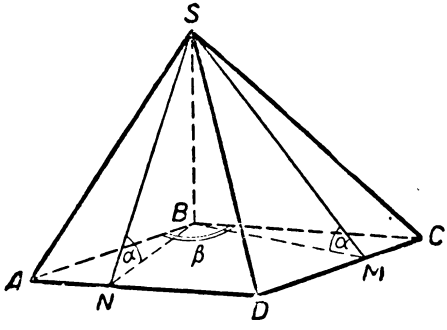
1805. Сечение, проведённое через середины рёбер трёхгранного угла правильной четырёхугольной пирамиды, имеет высоту h и угол $90° + \alpha$ (черт. 82). Определить объём пирамиды и вычислить его при $h = 2{,}017$ *м* и $\alpha = 29°55'$.

1806*. В треугольной пирамиде все боковые рёбра и две стороны основания равны между собой и равны b, а угол между равными сторонами основания равен α. Определить объём пирамиды и вычислить этот объём при $b = 25{,}4$ и $\alpha = 36°48'$.

1807*. В треугольной пирамиде две боковые грани — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны b и образуют между собой угол α. Определить объём пирамиды и вычислить его при $b = 10{,}25$ *см* и $\alpha = 47°32'$.

1808. Полная поверхность правильной четырёхугольной пирамиды равна S. Угол наклона боковой грани к плоскости основания равен α. Определить объём пирамиды и вычислить его при $S = 234{,}6$ кв. ед. и $\alpha = 58°32'$.

1809*. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой тупой угол β; две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α (черт. 83). Найти боковую поверхность пирамиды. Вычислить боковую поверхность при $a = 11{,}08$ *м*; $\alpha = 69°16'$; $\beta = 106°50'$.



Черт. 83.

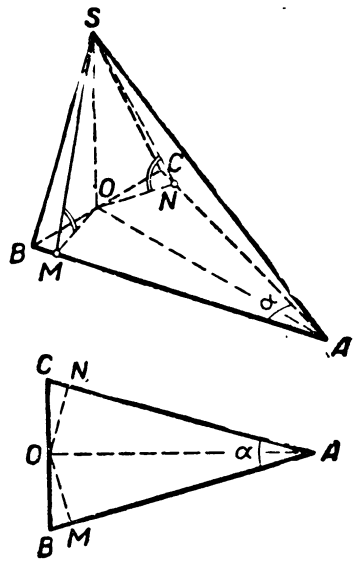
1810. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), боковая сторона которого b, а угол при вершине равен α. Грань SBC перпендикулярна плоскости основания, а грани SAB и SAC образуют с ней равные углы β (черт. 84). Определить объём пирамиды.

1811. Основанием пирамиды служит параллелограм, диагонали которого пересекаются под углом α. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна h. Боковые рёбра образуют с плоскостью основания углы β и γ. Определить объём пирамиды и вычислить его при $h = 27{,}8$ *см*; $\alpha = 34°20'$; $\gamma = 43°20'$; $\beta = 52°20'$.

1812. Плоский угол при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равен 2α, а высота пирамиды H. Определить полную поверхность пирамиды.

1813. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найти угол между боковым ребром пирамиды и её высотой.

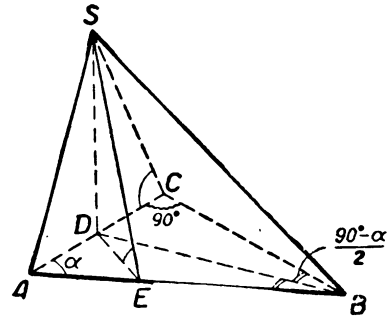
1814. В правильной четырёхугольной пирамиде площадь диагонального сечения равна Q, а сторона основания a. Найти двугранный угол при основании.



Черт. 84.

1815. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна a, а один из острых углов равен α. Высота пирамиды проходит через центр описанной около основания окружности и равна гипотенузе. Определить объём пирамиды и двугранные углы при основании.

1816. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c, а острый угол равен α. Боковая грань, проходящая через катет, прилежащий к данному острому углу, перпендикулярна к основанию, а две другие боковые грани наклонены к основанию под углом α (черт. 85). Определить объём пирамиды.



Черт. 85.

1817. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c, а острый угол α. Боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к основанию, а две другие боковые грани наклонены к основанию под углом α. Найти объём пирамиды.

1818. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым

ребром и противоположной стороной основания (длина общего перпендикуляра) равно d. Определить объём пирамиды.

1819. Середина бокового ребра правильной треугольной пирамиды отстоит от центра основания на расстоянии a, а плоский угол при вершине равен 2α. Определить полную поверхность пирамиды.

1820. Плоскость, проходящая через диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды параллельно боковому ребру, делит пирамиду на две части. Определить объём меньшей части пирамиды, если боковое ребро данной пирамиды равно a и наклонено к плоскости основания под углом α.

1821. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны b и углы при основании α. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды и вершину угла α. Решение исследовать.

1822. Определить полную поверхность и объём правильной n-угольной пирамиды, если сумма её апофемы и апофемы основания есть a, а плоский угол при вершине α.

1823*. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань образует с основанием угол α. Через центр основания проведена плоскость, параллельная боковой грани пирамиды. Найти полную поверхность пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от данной пирамиды.

1824*. Основанием пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC. Высота пирамиды равна h и проходит через биссектрису угла BAC, ребро SA образует с плоскостью основания пирамиды угол α, а противолежащая этому ребру боковая грань наклонена к основанию под углом β. Найти объём пирамиды.

1825*. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник, в котором $AB = AC$, грани SAB и SAC перпендикулярны к основанию, третья грань образует с основанием двугранный угол α. Боковое ребро SB наклонено к основанию под углом β и равно b. Найти объём пирамиды.

1826*. Основанием пирамиды служит квадрат. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом α. Радиус окружности, описанной около боковой грани, перпендикулярной к основанию, равен R. Найти боковую поверхность пирамиды и вычислить её при $R = 10{,}28$ *дм*; $\alpha = 32°28'$.

1827*. От правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания a и плоским углом при вершине α отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через диагональ основания данной четырёхугольной пирамиды параллельно одному из её боковых рёбер. Определить боковую поверхность образовавшейся треугольной пирамиды, приняв за основание

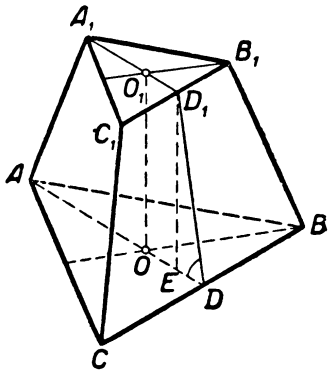
грань, лежащую на основании данной четырёхугольной пирамиды. Вычислить боковую поверхность треугольной пирамиды при $a = 7{,}18$ *дм*; $\alpha = 41°44'$.

§ 30. Усечённая пирамида

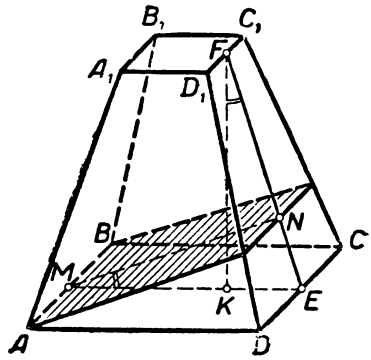
1828. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды a и b $(a > b)$. Определить боковое ребро этой пирамиды, если оно образует с бо́льшим основанием угол α.

1829. Боковая грань правильной треугольной усечённой пирамиды образует с большим основанием угол β (черт. 86). Найти высоту этой пирамиды, если стороны её оснований a и b.

1830. Определить площадь диагонального сечения правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, если площади оснований равны B и b, а боковое ребро образует с плоскостью большего основания угол β.



Черт. 86.



Черт. 87.

1831. В правильной треугольной усечённой пирамиде через боковое ребро и ось пирамиды проведено сечение. Найти площадь этого сечения, если боковое ребро образует с основанием угол α, а стороны оснований a и b $(a > b)$.

Боковая и полная поверхность пирамиды

1832. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды a и b $(a > b)$. Двугранный угол при основании α. Определить боковую поверхность пирамиды и вычислить её при $a = 30{,}05$; $b = 20{,}02$; $\alpha = 72°27'$.

1833. Сечение, проведённое через сторону основания правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, перпендикулярно к противолежащей боковой грани и образует с основанием угол α (черт. 87). Определить боковую поверхность пирамиды, зная, что сторона большего основания и высота пирамиды равны a.

1834. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде отношение площадей оснований равно $k^2 (k > 1)$, а боковая грань образует с большим основанием угол α. Определить боковую поверхность данной пирамиды, если её апофема равна h.

1835. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде высота равна H. Боковые грани наклонены к плоскости большего основания под углом α. Периметр одного основания в n раз больше периметра другого. Определить полную поверхность пирамиды.

Объём пирамиды

1836. В четырёхугольной пирамиде через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Определить объём образовавшейся при этом усечённой пирамиды, если основанием данной пирамиды является ромб с меньшей диагональю d и острым углом α, а высота усечённой пирамиды равна большей диагонали ромба.

1837. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны a и b $(a > b)$. Определить объём пирамиды, если её боковое ребро наклонено к стороне большего основания под углом α.

1838. Определить объём правильной шестиугольной усечённой пирамиды, стороны оснований которой a и $b (a > b)$, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α.

1839. Боковая грань правильной усечённой четырёхугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α. Площадь нижнего основания пирамиды в 9 раз больше площади верхнего основания, а её объём равен V. Найти боковую поверхность пирамиды.

1840. Основаниями усечённой пирамиды служат равнобедренные треугольники с углами α при вершине. Разность между боковым ребром пирамиды, соединяющим вершины этих углов, и высотой пирамиды равна d, а угол между тем же ребром и высотой пирамиды равен β. Каждая из равных сторон верхнего основания равна a, а стороны нижнего основания в n раз больше соответствующих сторон верхнего основания. Найти объём пирамиды.

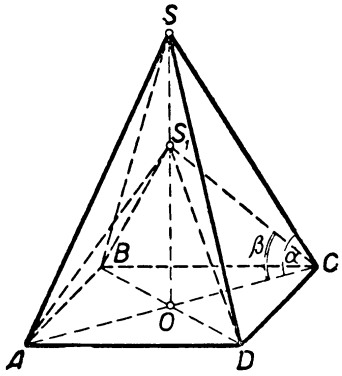
§ 31. Комбинации многогранников

1841. Равносторонний треугольник со стороной a служит основанием прямой призмы и правильной пирамиды, которые имеют одну и ту же высоту. Определить разность объёмов призмы и пирамиды, если двугранный угол при основании пирамиды равен α.

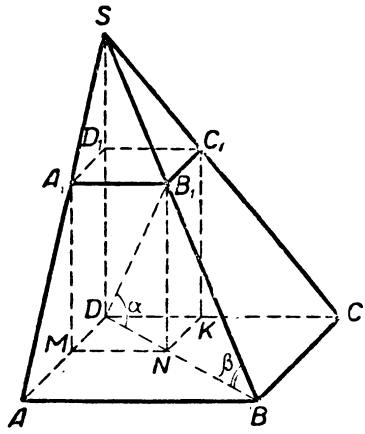
1842. Куб с ребром a вписан в правильную четырёхугольную пирамиду так, что четыре вершины его находятся на боковых рёбрах пирамиды, а четыре другие вершины на основании пирамиды Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Определить объём пирамиды.

1843. В правильную четырёхугольную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды, а четыре другие вершины — на основании пирамиды. Ребро куба равно a. Определить объём пирамиды.

1844. Две правильные четырёхугольные пирамиды, имеющие общее основание, расположены так, что одна из них находится внутри другой. Боковое ребро большей из этих пирамид наклонено к плоскости их общего основания под углом



Черт. 88.



Черт. 89.

α, а угол наклона бокового ребра меньшей пирамиды к той же плоскости равен β. Радиус окружности, описанной около общего основания пирамид, равен R (черт. 88). Определить объём тела, ограниченного боковыми поверхностями этих пирамид.

1845*. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a, две боковые грани пирамиды перпендикулярны к основанию, а большее боковое ребро её наклонено к основанию под углом β. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что четыре вершины его находятся на боковых рёбрах пирамиды, а четыре другие вершины — на основании пирамиды (черт. 89). Определить объём параллелепипеда, зная, что диагональ его образует с плоскостью основания угол α. Вычислить объём параллелепипеда при $a = 45{,}3$ *дм*; $\alpha = 40°26'$; $\beta = 42°50'$.

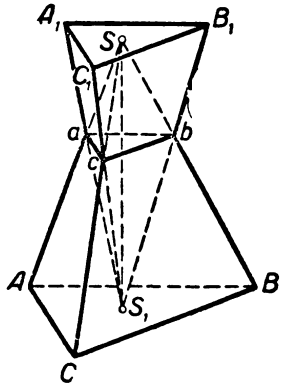
1846*. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a; высота пирамиды делит пополам сторону основания; грань пирамиды, противолежащая этой стороне, образует с основанием двугранный угол α. В пирамиду вписан куб так, что четыре вершины его лежат на боковых рёбрах пирамиды, а четыре другие вершины лежат на плоскости основания пира-

миды. Найти объём куба. Вычислить объём куба при $a = 15{,}72$ *см*; $\alpha = 70°40'$.

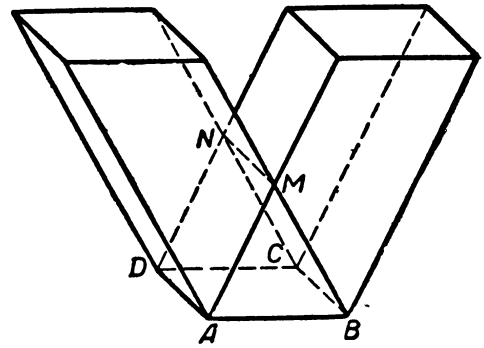
1847. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде боковое ребро a равно стороне большего основания и составляет с ней угол α. Центр большего основания служит вершиной полной пирамиды, основание которой совпадает с меньшим основанием усечённой пирамиды. Найти разность объёмов усечённой пирамиды и полной пирамиды.

1848*. Пирамида и прямая призма расположены по одну сторону от их общего основания, которое является правильным треугольником со стороной, равной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания; равные боковые рёбра образуют между собой угол α; высота призмы в два раза меньше высоты пирамиды. Найти объём призмы и вычислить его при $a = 3{,}520$ *м*; $\alpha = 41°20'$.

1849. Две правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту; вершина каждой из пирамид лежит в центре основания другой; боковые рёбра одной пересекают боковые рёбра



Черт. 90.



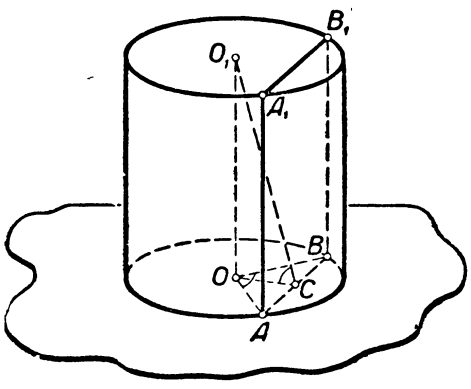
Черт. 91.

второй пирамиды. Боковое ребро l первой пирамиды образует с высотой угол α, боковое ребро второй пирамиды образует с высотой угол β. Определить объём общей части обеих пирамид (черт. 90).

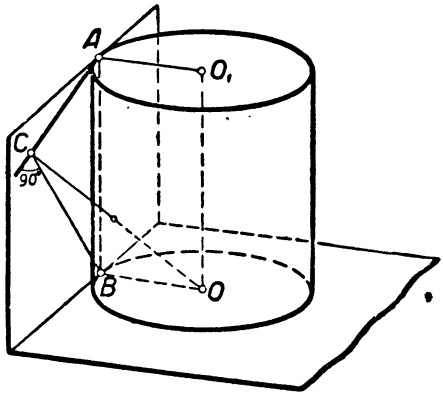
1850. Общим основанием двух наклонных параллелепипедов служит квадрат со стороной a. Две стороны верхнего основания одного параллелепипеда являются продолжением двух сторон верхнего основания другого параллелепипеда. Две боковые грани каждого паралелепипеда наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом α, а две другие боковые грани перпендикулярны к той же плоскости (черт. 91). Определить объём общей части обоих параллелепипедов.

§ 32. Цилиндр

1851. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α (черт. 92). Определить площадь сечения, если радиус окружности основания равен R и отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с серединой хорды, стягивающей данную дугу, наклонён к плоскости основания тоже под углом α. Вычислить площадь сечения при $R = 10{,}05$ *дм*; $\alpha = 73°12'$.



Черт. 92.



Черт. 93.

1852. Через верхний конец образующей равностороннего цилиндра под углом α к ней проведена касательная к цилиндру (черт. 93). Определить расстояние от центра каждого основания до касательной, если радиус основания цилиндра равен R.

1853. Боковая поверхность цилиндра развёрнута на плоскости. Диагонали развёртки пересекают основание под углом α и каждая равна d. Определить полную поверхность и объём цилиндра. Вычислить объём при $d = 136{,}8$ *дм* и $\alpha = 27°17'$.

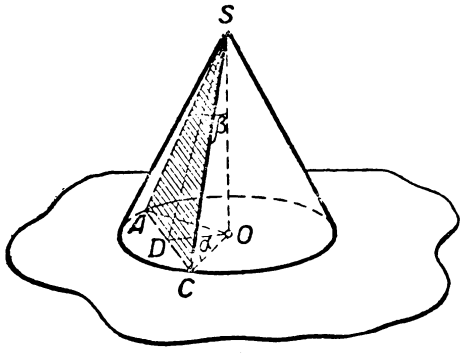
1854. Определить боковую поверхность и объём цилиндра, зная, что диагональ d осевого сечения цилиндра составляет с основанием угол α. Вычислить объём при $d = 24{,}5$ *дм* и $\alpha = 53°40'$.

1855. Цилиндр пересечён плоскостью параллельно оси и отсекающей на окружности основания дугу α. Диагональ сечения равна d и составляет с основанием угол β. Найти объём цилиндра.

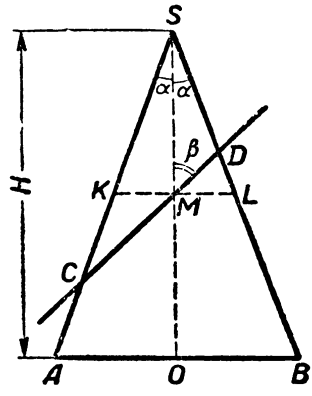
§ 33. Конус

1856. Через две образующие конуса проведена плоскость, отсекающая в основании дугу в 120°. Определить площадь сечения, если радиус основания конуса равен R и плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол α.

1857*. В конусе, радиус основания которого R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α, проведена плоскость через вершину конуса под углом β к его высоте (черт 94). Определить площадь полученного сечения. Решение исследовать.



Черт. 94.



Черт. 95.

1858. Высота конуса равна H, угол между осью конуса и образующей равен α. Через середину высоты проведена прямая под углом β к ней и пересекающая боковую поверхность конуса в двух точках (черт. 95). Определить отрезок прямой, заключённый внутри конуса. Решение исследовать.

Поверхность конуса

1859. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2β. Длина окружности основания равна C. Определить боковую поверхность конуса.

1860. Доказать, что угол развёртки боковой поверхности конуса равен $360° \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, где α — наибольший угол между образующими конуса. Проследить, как изменяется угол развёртки с изменением наибольшего угла между образующими.

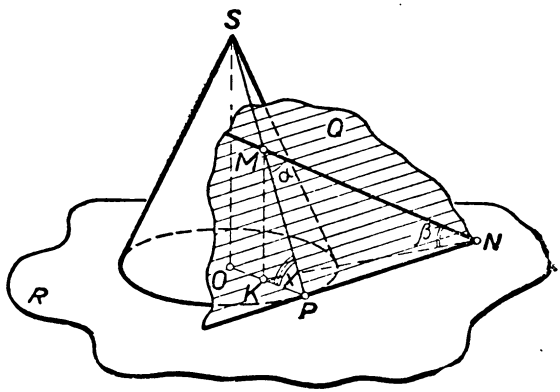
1861. Боковая поверхность конуса в n раз больше площади основания. Найти угол развёртки боковой поверхности конуса. Каким должен быть угол развёртки, чтобы боковая поверхность конуса превосходила площадь его основания в 4 раза?

1862. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 2β, а периметр осевого сечения $2p$. Определить полную поверхность конуса и вычислить её при $\beta = 29°$ и $p = 12$ *м*.

1863. Прямая, касательная к боковой поверхности конуса, составляет с образующей, проходящей через точку касания, угол α и наклонена к плоскости основания под углом β (черт 96). Определить боковую поверхность конуса, если его образующая равна l.

1864. Вычислить угол между образующей конуса и плоскостью основания, если известно, что боковая поверхность его есть средняя пропорциональная величина между площадью основания и полной поверхностью этого конуса.

1865. В конусе через его вершину проведено сечение под углом β к плоскости основания Плоскость сечения удалена от центра основания конуса на расстояние a. Определить полную поверхность конуса, если наибольший угол между образующими конуса равен α.



Черт. 96.

1866*. В конусе через его вершину и хорду основания проведено сечение; известно, что длина хорды равна a и меньшая дуга, стягиваемая этой хордой, содержит α°. Определить полную поверхность конуса, если угол между двумя образующими конуса, принадлежащими сечению, равен β. Вычислить полную поверхность конуса при $a = 15{,}25$ *дм*; $\alpha = 39°00'$; $\beta = 21°12'$.

Объём конуса

1867. Определить объём конуса, если в его основании хорда a стягивает дугу α, а угол между образующей и высотой конуса равен β.

1868. Осевое сечение конуса представляет собой треугольник, площадь которого равна Q. Определить боковую поверхность и объём конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

1869. Осевым сечением конуса является треугольник, угол при вершине которого α. Радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R. Определить объём конуса.

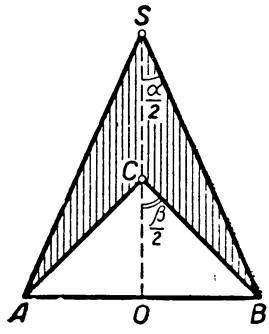
1870. Образующая конуса составляет с основанием угол α. Определить объём и полную поверхность конуса, зная площадь K сечения, проходящего через две его образующие, угол между которыми равен β.

1871. Через вершину конуса проведена плоскость под углом α к основанию конуса; эта плоскость пересекает основание по хорде a, видимой из центра основания под углом β. Найти объём конуса.

1872*. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, образует в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен α. Опре-

делить объём конуса и вычислить его при $a = 63{,}15$ *см*; $\alpha = 66°52'$.

1873. На общем основании построены два конуса один внутри другого так, что их вершины находятся друг от друга на расстоянии a (черт. 97). Определить объём тела, ограниченного коническими поверхностями обоих конусов, если угол при вершине осевого сечения большего конуса равен α, а меньшего конуса равен β.



Черт. 97.

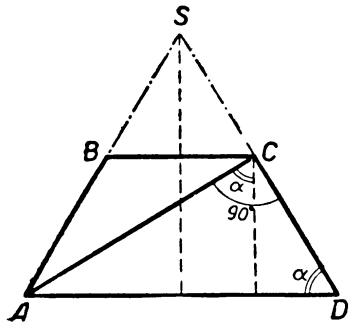
1874. Круг, радиус которого равен R, служит общим основанием двух конусов, построенных по одну и ту же сторону их основания. Образующая одного из этих конусов составляет с плоскостью основания угол α, образующая другого составляет с той же плоскостью угол β. Определить объём тела, ограниченного боковыми поверхностями этих конусов ($\alpha > \beta$).

§ 34. Усечённый конус

Поверхность усечённого конуса

1875. Образующая усечённого конуса наклонена к большему основанию, имеющему радиус R, под углом α; радиус другого основания равен r. Определить боковую поверхность конуса.

1876. Образующая усечённого конуса равна l и наклонена к большему основанию под углом α; диагональ осевого сечения составляет с основанием угол β. Определить боковую поверхность усечённого конуса.



Черт. 98.

1877. В усечённом конусе высота равна h; образующая составляет с плоскостью большего основания угол α и перпендикулярна к диагонали осевого сечения (черт. 98). Определить боковую поверхность усечённого конуса. Решение исследовать.

1878. Высота усечённого конуса есть среднее пропорциональное между радиусами его оснований; сумма же радиусов оснований равна L. Угол, составленный образующей усечённого конуса с плоскостью его основания, равен α. Определить боковую поверхность этого конуса. Решение исследовать.

1879. В усечённом конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью боль-

шего основания угол α и равна l. Определить полную поверхность усечённого конуса.

Объём усечённого конуса

1880. Образующая усечённого конуса наклонена к его основанию, имеющему радиус R, под углом α, радиус другого основания равен r. Найти объём усечённого конуса.

1881. Определить боковую поверхность и объём усечённого конуса, образующая которого наклонена к основанию под углом α, а площадь круга, вписанного в осевое сечение конуса, равна K.

1882. В усечённом конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью большего основания угол α. Определить объём конуса, если площадь его осевого сечения равна S.

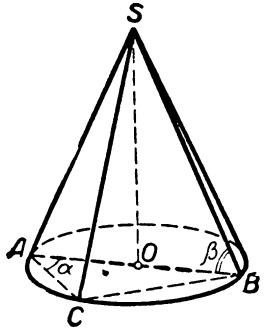
1883. Образующая усечённого конуса равна a и наклонена к меньшему основанию под углом α. Определить объём и боковую поверхность конуса, зная, что отношение площадей оснований его равно $n^2 (n > 1)$.

§ 35. Комбинации цилиндра и конуса с многогранниками

1884. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Определить объём пирамиды, зная, что боковая поверхность конуса равна S, а образующая его наклонена к плоскости основания под углом β (черт. 99).

1885. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом α. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к основанию под одним и тем же углом, равным α. Определить полную поверхность конуса, описанного около пирамиды.

1886. В конус, радиус основания которого R, вписана треугольная пирамида. Определить объём пирамиды, если её основанием служит прямоугольный треугольник с острым углом α и все боковые рёбра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, равным α.

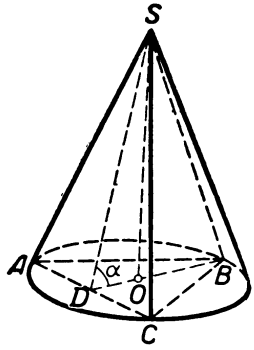


Черт. 99.

1887. В конус, площадь основания которого равна Q, вписана правильная треугольная пирамида; боковая грань пирамиды составляет с плоскостью основания угол α (черт. 100). Определить полную поверхность пирамиды.

1888. В конус вписана правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом α. Определить объём конуса, если сторона основания пирамиды равна a.

1889. В конус, высота которого H, вписана правильная треугольная пирамида; боковая грань пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность и объём пирамиды и конуса.



Черт. 100.

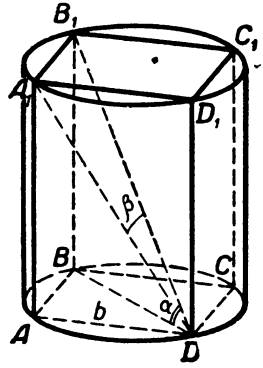
1890*. В правильной четырёхугольной пирамиде расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно a. Найти полную поверхность вписанного в пирамиду конуса, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Вычислить полную поверхность конуса при $a=37{,}42$ *дм*; $\alpha = 46°28'$.

1891. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом α. В призму вписан конус так, что его основание вписано в основание призмы, а вершина конуса находится на плоскости другого основания призмы. Найти полную поверхность призмы, зная, что диаметр основания конуса равен d, а угол наклона образующей конуса к плоскости его основания равен β. Вычислить полную поверхность призмы при $d=12{,}73$ *дм*; $\alpha=52°28'$; $\beta = 73°45'$.

1892. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Определить объём описанного около этой призмы цилиндра, если объём призмы равен V. Решение исследовать.

1893. Основание прямой призмы — треугольник, два угла которого равны α и β. Объём призмы равен V. Определить объём описанного около призмы цилиндра.

1894. В цилиндр, боковая поверхность которого равна S, вписана пирамида так, что основание её, являющееся правильным пятиугольником, вписано в основание цилиндра, а вершина находится на другом основании цилиндра. Определить объём пирамиды, зная, что её боковые грани наклонены к основанию под углом α.



Черт. 101.

1895. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, у которого одна из сторон основания равна b. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью, проходящей через данную сторону основания, угол β (черт. 101). Определить боковую поверхность цилиндра и вычислить её при $b = 12{,}70$ *дм*; $\alpha = 41°30'$; $\beta = 22°17'$.

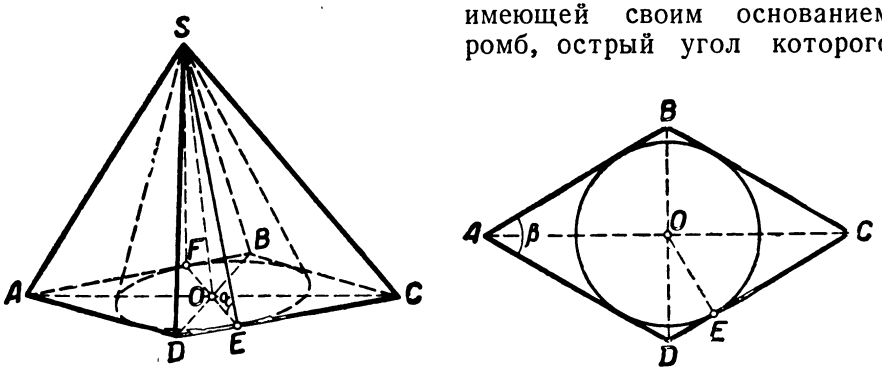
1896. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого равна d и образует с меньшей боковой гранью угол β. Определить объём цилиндра,

если известно, что диагональ основания параллелепипеда составляет с большей стороной основания угол α. Вычислить объём цилиндра при $d = 10{,}75$ *дм*; $\alpha = 30°40'$; $\beta = 19°10'$.

1897*. Дана правильная треугольная пирамида. Вершина основания удалена от противоположной грани на расстояние b. Апофема пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α. В эту пирамиду вписан конус. Определить полную поверхность конуса и вычислить её при $b = 10{,}16$; $\alpha = 61°10'$.

1898*. Основанием пирамиды, все боковые рёбра которой равны между собой, служит равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной a и острым углом при вершине α. Боковая грань пирамиды, проходящая через основание треугольника ABC, наклонена к основанию пирамиды под углом β. Найти объём конуса, описанного около этой пирамиды, и вычислить его при $a = 28{,}30$; $\alpha = 54°20'$; $\beta = 65°32'$.

1899. Образующая конуса равна l и составляет с основанием угол α. Найти объём описанной около конуса пирамиды, имеющей своим основанием ромб, острый угол которого



Черт. 102.

равен β (черт. 102). Вычислить объём пирамиды при $l = 14{,}20$ *дм*; $\alpha = 52°17'$; $\beta = 61°14'$.

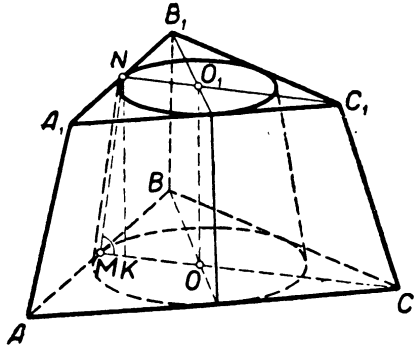
1900. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция, диагональ которой составляет угол α с каждой из параллельных сторон. Боковая поверхность призмы равна S. Определить боковую поверхность цилиндра, вписанного в эту призму. При каких значениях α задача имеет решение?

1901. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его основание лежит в плоскости основания пирамиды. Определить объём цилиндра.

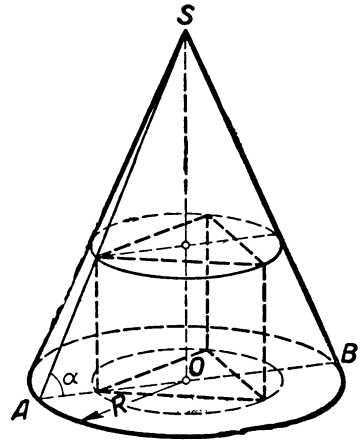
1902. Двугранный угол при основании правильной треугольной усечённой пирамиды равен α. Определить боковую поверхность усечённого конуса, вписанного в эту пирамиду, зная, что апофема пирамиды равна сумме радиусов оснований конуса, а радиус меньшего основания конуса равен r (черт. 103).

1903. Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом β. Определить полную поверхность куба, вписанного в этот конус.

1904. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписана прямая треугольная призма с равными рёбрами. Найти объём призмы, если радиус основания конуса равен R (черт. 104). Решение исследовать.

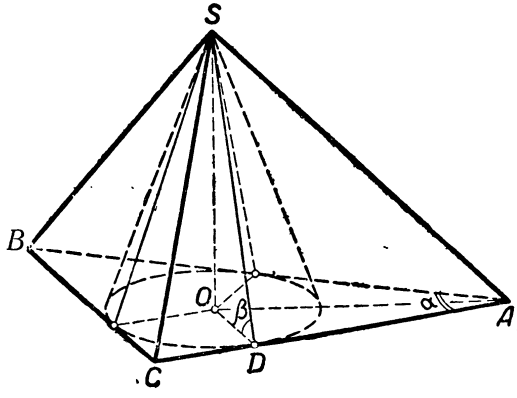


Черт. 103.



Черт. 104.

1905. Полная поверхность конуса равна S. Образующая его наклонена к плоскости основания под углом α. Вычислить объём правильной n-угольной пирамиды, вписанной в этот конус.



Черт. 105.

1906*. Около конуса описана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен α. Определить объём пирамиды, если известно, что радиус основания конуса равен r и образующая наклонена к плоскости основания под углом β (черт. 105). Вычислить объём пирамиды при $r = 5{,}25$ *дм*; $\alpha = 49°30'$ и $\beta = 72°20'$.

1907*. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник; боковая грань пирамиды, проходящая через один из катетов этого треугольника, образует с плоскостью основания угол α. Найти объём пирамиды, если образующая конуса равна l и наклонена к пло-

скости основания под углом β. Вычислить объём пирамиды при $l = 12{,}70$ *дм*; $\alpha = 62°14'$; $\beta = 54°19'$.

1908*. В правильную четырёхугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании равен α, вписан цилиндр. Найти объём цилиндра, зная, что высота и радиус основания равны между собой. Вычислить объём цилиндра при $a = 11{,}78$ *м* и $\alpha = 51°25'$.

1909*. В цилиндр, образующая которого равна l, вписана пирамида так, что её основание, являющееся правильным треугольником, вписано в основание цилиндра, а вершина находится на другом основании цилиндра. Зная, что две боковые грани пирамиды перпендикулярны к её основанию, а третья образует с основанием двугранный угол α, найти боковую поверхность пирамиды. Вычислить боковую поверхность пирамиды при $l = 38{,}12$ *см*; $\alpha = 48°46'$.

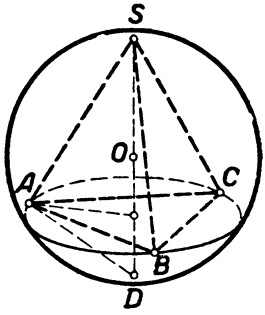
§ 36. Шар и его части

Шар

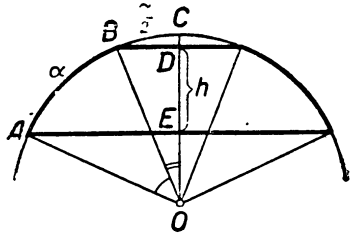
1910. Из точки поверхности шара проведены три равные хорды под углом α одна к другой (черт. 106). Определить их длину, если радиус шара равен R.

1911. Под каким углом виден из центра шара диаметр его сечения, площадь которого в n раз меньше поверхности шара?

1912. Шар пересечён плоскостью, составляющей угол α с радиусом шара, проведённым к окружности сечения. Полагая поверхность шара равной S, определить величину её частей (по обе стороны секущей плоскости) и площадь сечения шара.



Черт. 106.



Черт. 107.

1913. Определить объём шара, если два диаметра большого круга образуют угол α, а разность хорд, соединяющих конец одного из них с концами другого, равна d.

Шаровой пояс

1914. Высота шарового пояса h, а дуги в осевом сечении, стягиваемые диаметрами его оснований, α и 3α (черт. 107). Определить поверхность пояса.

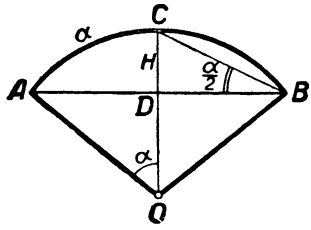
1915. Определить часть поверхности земного шара, радиус которого равен R, заключённую между параллелями α° и β° ($\alpha = 23°30'$; $\beta = 66°30'$; $R = 6370$ *км*).

1916. Определить поверхность шарового пояса, зная радиус R шара и углы α и β, под которыми из центра шара видны соответственно диаметр меньшего основания и диаметр сечения, равноудалённого от оснований ($R = 3{,}15$ *м*; $\alpha = 50°18'$; $\beta = 115°39'$).

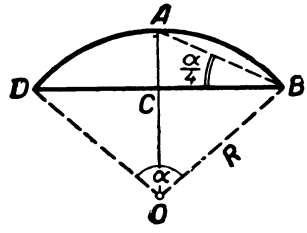
Шаровой сектор

1917. Высота конуса равна h, наибольший угол между его образующими α. Определить объём шарового сектора, получаемого дополнением данного конуса соответствующим шаровым сегментом.

1918. Дуга сегмента в осевом сечении шарового сектора равна 2α, высота сегмента равна H (черт. 108). Найти объём и сферическую поверхность шарового сектора.



Черт. 108.



Черт. 109.

1919. Определить объём шарового сектора, зная, что дуга в осевом сечении его равна α, а стягивающая её хорда равна b.

Шаровой сегмент

1920. Определить объём шарового сегмента, зная, что дуга его осевого сечения α, радиус шара, от которого отделён сегмент, равен R (черт. 109).

1921. Найти сферическую поверхность и объём шарового сегмента, зная, что дуга осевого сечения его содержит α°, а радиус основания равен r ($\alpha = 30°20'$; $r = 14{,}5$ *дм*).

1922. Объём шарового сектора V, а центральный угол в его осевом сечении 2α. Определить высоту сегмента и вычислить её при $V = 589{,}4$ *см*^{3} и $2\alpha = 103°36'$.

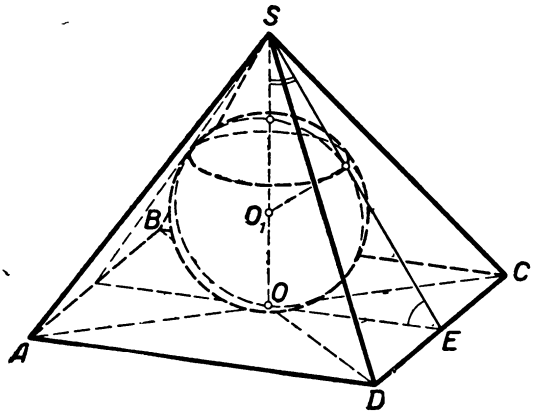
1923. В шаре проведены два равных параллельных сечения. Определить поверхности полученных при этом шарового пояса и шарового сегмента, если дано: α — дуга сегмента в осевом сечении и S — площадь прямоугольника, у которого одна сторона равна хорде, стягивающей дугу α, а другая — расстоянию между плоскостями сечения.

1924. В шаровой сегмент радиуса R вписан конус, имеющий общую высоту и общее основание с сегментом. Зная, что наибольший угол между образующими конуса равен 2α, определить, на сколько объём конуса меньше объёма сегмента.

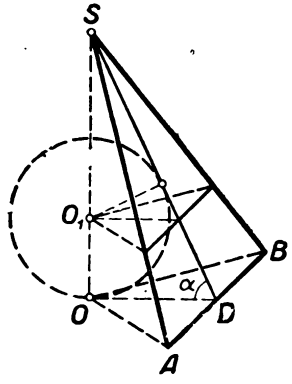
§ 37. Комбинации многогранников и круглых тел с шаром

1925*. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан шар. Расстояние центра шара от вершины пирамиды равно a, а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания равен α (черт. 110). Определить полную поверхность пирамиды и вычислить её при $a = 20{,}75$ *дм* и $\alpha = 63°20'$.

1926*. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан шар. Определить поверхность шара, если известно, что сторона основания равна a и плоский угол при вершине пирамиды равен α. Вычислить поверхность при $a = 10{,}75$ *дм* и $\alpha = 41°44'$.



Черт. 110.



Черт. 111.

1927. В правильную четырёхугольную пирамиду, у которой двугранный угол при основании α, вписан шар. Определить объём пирамиды, если площадь её сечения, проведённого через точки касания шара с боковыми гранями пирамиды, равна S.

1928. Площадь основания правильной n-угольной пирамиды равна Q, а каждый из двугранных углов при основании равен α; эта пирамида пересечена плоскостью, проведённой через центр вписанного шара параллельно основанию (черт. 111). Определить площадь сечения.

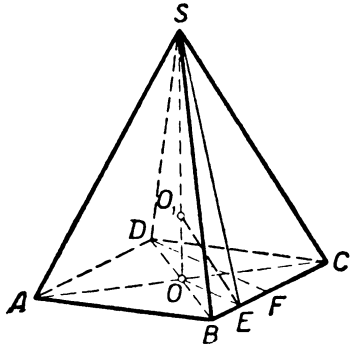
1929. Шар вписан в пирамиду, основанием которой служит равнобедренный треугольник с двумя равными углами β и стороной b между ними. Определить радиус шара, если боковые грани пирамиды наклонены к её основанию под углом α.

1930. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α; двугранные углы при основании равны β. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду (черт. 112).

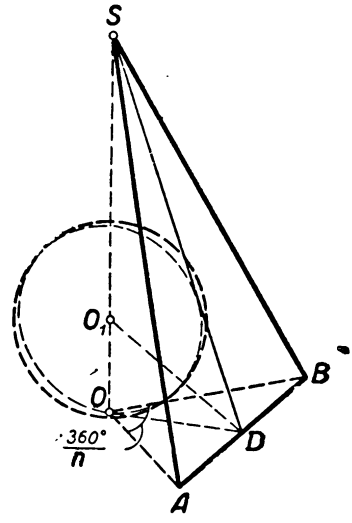
1931. Около шара радиуса r описана правильная шестиугольная пирамида, боковые грани которой составляют с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность и объём пирамиды.

1932. Найти радиус шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду по стороне основания a и плоскому углу при вершине α (черт. 113).

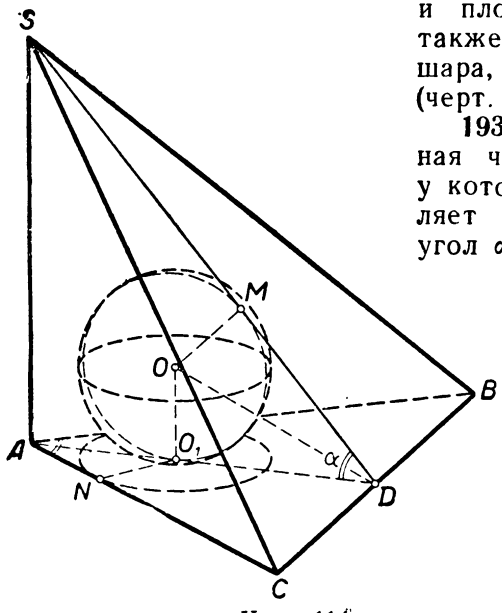
1933. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b. Соответствующие им боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол α; угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания равен также α. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду (черт. 114).



Черт. 112.

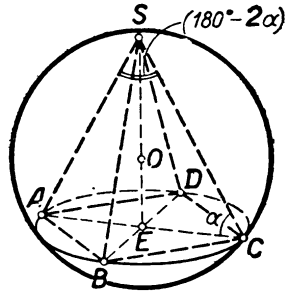


Черт. 113.



Черт. 114.

1934. В шар вписана правильная четырёхугольная пирамида, у которой боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Объём пирамиды равен V (черт. 115). Найти объём шара и вычислить его при $V = 0{,}7534\ м^3$; $\alpha = 62°14'$.



Черт. 115.

1935. В шар радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, боковое ребро которой составляет с высотой угол α. Определить объём пирамиды.

1936. Найти боковую поверхность правильной четырёхугольной пирамиды, вписанной в шар радиуса R, если плоский угол при вершине пирамиды равен α. Вычислить боковую поверхность при $R = 0{,}8203$ *м*; $\alpha = 70°14'$.

1937. Около правильной четырёхугольной пирамиды, боковое ребро которой равно b и наклонено к плоскости основания под углом α, описан шар. Найти расстояние от центра шара до основания пирамиды.

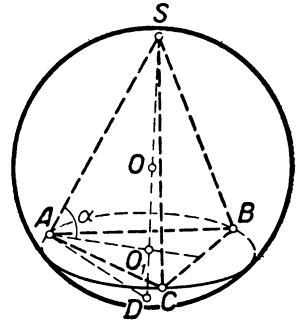
1938. В шар вписана правильная четырёхугольная пирамида с боковым ребром b и двугранным углом α при основании. Определить поверхность шара.

1939. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна H; перпендикуляр, опущенный из центра шара, описанного около пирамиды, на её боковую грань, образует с высотой угол α. Определить объём шара.

1940*. В шар радиуса R вписана четырёхугольная пирамида, боковые рёбра которой наклонены к плоскости основания под углом φ. Определить объём пирамиды, если в её основании лежит прямоугольник с углом α между его диагоналями. Вычислить объём пирамиды при $R = 30{,}75$ *см*; $\varphi = 73°20'$; $\alpha = 40°30'$.

1941. В шар радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, у которой двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Найти сторону основания пирамиды.

1942. В шар вписана правильная треугольная пирамида, стороны основания которой равны a. Определить поверхность шара, если боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α (черт. 116).



Черт. 116.

1943. Определить радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна a и составляет с основанием угол α.

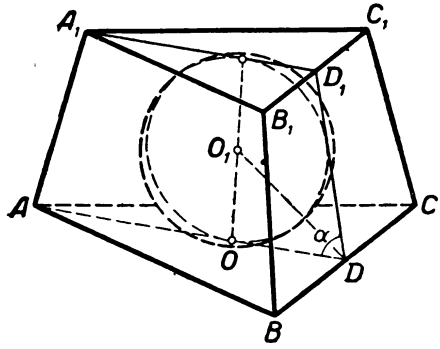
1944. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида. Определить объём пирамиды, если её ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

1945. В правильной четырёхугольной пиримиде сторона основания равна a и плоский угол при вершине равен α. Найти радиусы шаров, вписанного и описанного около пирамиды.

1946. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине равен α. Определить ра-

диус шара, вписанного в пирамиду, и радиус шара, описанного около неё.

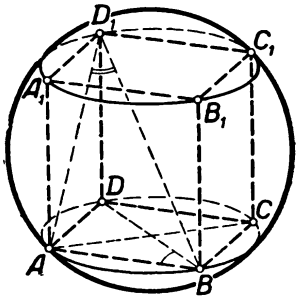
1947. Грани правильной усечённой треугольной пирамиды касаются шара. Определить отношение поверхности шара к полной поверхности пирамиды, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом α (черт. 117).



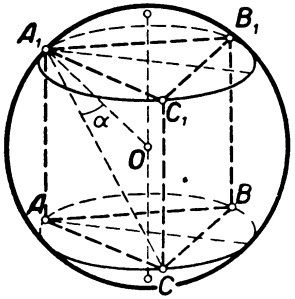
Черт. 117.

1948. В шар вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к основанию под углом α. Найти объём цилиндра, если поверхность шара равна S.

1949*. В шар радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с меньшей боковой гранью угол α; диагональ основания параллелепипеда образует с большей стороной основания угол β (черт. 118). Определить боковую поверхность параллелепипеда и вычислить её при $R = 10{,}80$ *дм*; $\alpha = 52°55'$; $\beta = 17°15'$.



Черт. 118.



Черт. 119.

1950. Определить рёбра правильной треугольной призмы, зная, что радиус R описанного около неё шара, проведённый в вершину призмы, составляет угол α с боковой гранью, содержащей эту вершину (черт. 119).

1951. В конус вписан шар радиуса r. Определить полную поверхность конуса, если угол между образующей и основанием конуса равен α. Вычислить полную поверхность конуса при $r = 42{,}48$ *см*; $\alpha = 42°16'$.

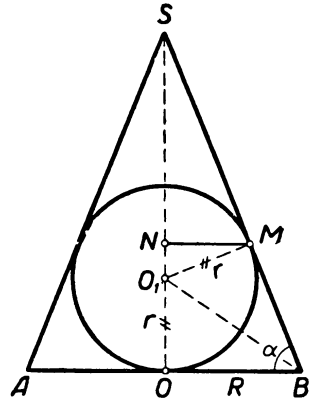
1952. В конус вписан шар, у которого площадь большого круга равна K. Определить объём конуса, если угол между высотой и образующей конуса равен α.

1953. Определить объём конуса, если радиус вписанного

в него шара равен r и угол, под которым образующая конуса видна из центра шара, равен α.

1954. Образующие конуса касаются шара, вписанного в конус, по параллели $\alpha°$. Найти объём конуса, если радиус шара равен r.

1955. В конус, у которого образующая наклонена к плоскости основания под углом α, а площадь основания равна F, вписан шар. Найти расстояние от вершины конуса до плоскости круга, по окружности которого поверхность шара касается боковой поверхности конуса (черт. 120).



Черт. 120.

1956*. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, а площадь основания равна S, вписан шар. Определить объём конуса, отсекаемого от данного плоскостью круга, по окружности которого поверхность шара касается боковой поверхности конуса. Вычислить объём конуса при $S = 18{,}25$ $дм^2$ и $\alpha = 56°32'$.

1957. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α. В конус вписан шар и через их линию касания проведена плоскость. Найти отношение объёмов полученного конуса к данному. Вычислить при $\alpha = 17°22'$.

1958. Найти поверхность шара, вписанного в конус, если полная поверхность конуса равна S, а угол между образующей и высотой конуса равен α. Вычислить поверхность шара при $S = 34{,}26$ $см^2$; $\alpha = 28°44'$.

1959. Поверхность шара, вписанного в конус, равна S. Определить полную поверхность и объём конуса, если наибольший угол между образующими конуса равен α.

1960. В шар вписан конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α. Определить полную поверхность конуса, если поверхность шара равна Q. Вычислить полную поверхность конуса при $Q = 784{,}2$ $см^2$ и $\alpha = 37°22'$.

1961. Определить объём конуса, вписанного в шар радиуса R, если угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Вычислить объём при $R = 12{,}30$ $см$ и $\alpha = 57°16'$.

1962. В шар, объём которого равен V, вписан конус. Определить объём этого конуса, зная, что угол, составленный двумя его образующими, проведёнными к концам одного и того же диаметра основания, равен α.

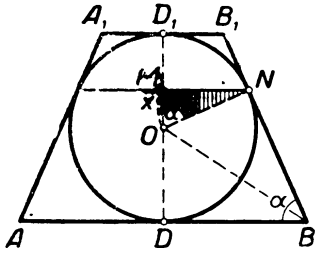
1963. Определить отношение объёма конуса к объёму описанного около него шара, если образующая конуса составляет с его осью угол α ($\alpha = 35°18'$).

1964. Полная поверхность конуса равна S, а угол при вершине осевого сечения α Определить радиус шара, равновеликого данному конусу. Вычислить радиус шара при $S = 528{,}5\ см^2$ и $\alpha = 115°28'$.

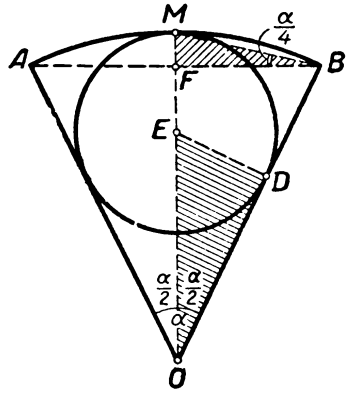
1965. На большом круге шара построен конус, образующая которого составляет с основанием угол α. Определить объём конуса, зная радиус r окружности, полученной при пересечении их поверхностей.

1966. В усечённый конус вписан шар радиуса r. Образующая конуса наклонена к основанию под углом α. Определить боковую поверхность и объём конуса.

1967. В усечённый конус, образующая котсрого наклонена к основанию под углом α, вписан шар. Определить поверхность шара, если поверхность большего сегмента, отделённая на шаре линией касания, равна S (черт. 121).



Черт. 121.



Черт. 122.

1968. Определить радиус шара, описанного около усечённого конуса, в котором радиусы оснований R и r, а образующая наклонена к плоскости большего основания под углом α.

1969. Определить поверхность шарового пояса, если диаметры его оснований стягивают дуги α и β, а площадь трапеции, основаниями которой служат эти диаметры, равна S.

1970. Определить поверхность шара, вписанного в сектор, если радиус шарового сектора равен R, а центральный угол сектора α.

1971. В шаровой сектор с углом α в осевом сечении вписан шар Определить объём шарового сектора, если объём шара равен V (черт. 122).

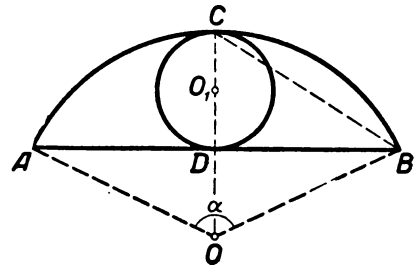
1972. В шаровой сектор, сферическая поверхность которого равна S, а дуга осевого сечения α, вписан шар. Определить поверхность шара.

1973. Радиус шара, вписанного в сектор с дугой α в осевом сечении, равен r. Определить объём сектора.

1974. В шаровой сегмент с дугой α в осевом сечении вписан шар наибольшего диаметра. Определить поверхность сег-

мента и разность объёмов сегмента и шара, если поверхность шара равна S (черт 123).

1975. Большее основание усечённого конуса служит также основанием конуса, имеющего вершину в центре меньшего основания Определить разность объёмов конусов, если в усечённый конус вписан шар радиуса r, а образующая конуса наклонена к большему основанию под углом α.



Черт. 123.

1976. В усечённом конусе, у которого отношение площадей оснований равно 4, находится другой конус, имеющий общее основание с данным, а вершину в центре меньшего основания. Определить разность объёмов этих конусов, если угол при вершине осевого сечения меньшего конуса равен α и около этого конуса описан шар радиуса R.

1977. В шар вписан конус с углом α при вершине. Определить боковую поверхность и объём конуса, если дана сферическая поверхность S сегмента, имеющего с конусом одинаковые основание и высоту

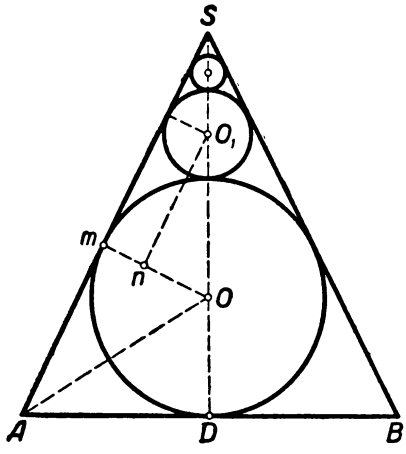
1978. В конус с образующей l, наклонённой к плоскости основания под углом α, вписан шар, а в него вписан куб. Определить поверхность куба.

1979. Внутри конуса лежит шар, касающийся основания в его центре. Через вершину конуса проведена плоскость, касательная к шару. Эта плоскость наклонена к плоскости основания конуса под углом β и отсекает от окружности основания дугу α (в угловой мере). Определить поверхность шара и объём конуса, если высота конуса равна H.

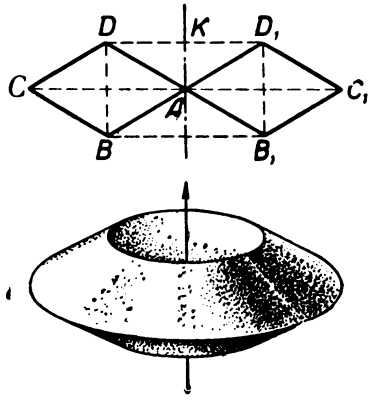
1980. Радиус шара, вписанного в правильную четырёхугольную пирамиду, равен r. Двугранный угол, образуемый двумя боковыми гранями, равен α. Определить объём пирамиды, имеющей вершину в центре шара, а вершины основания — в четырёх точках касания шара с боковыми гранями пирамиды.

1981. Около конуса описан шар, площадь большого круга которого равна Q, и в конус вписан шар. Определить объёмы: вписанного и описанного шаров и конуса, если образующая конуса наклонена к его основанию под углом α.

1982. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этот конус вписан ряд шаров так, что первый шар касается боковой поверхности конуса и его основания, а каждый следующий — боковой поверхности конуса и предыдущего шара. Найти предел, к которому стремится сумма объёмов этих шаров, если число их бесконечно увеличивается (черт. 124).



Черт. 124.



Черт. 125.

1983. Угол, составленный двумя образующими, проведёнными к концам одного и того же диаметра основания конуса, равен α; образующая равна l. Определить радиус сферической поверхности, имеющей центр в вершине конуса и разделяющей объём конуса пополам.

§ 38. Тела вращения

1984. Ромб, имеющий сторону a и острый угол α, вращается вокруг оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно большей диагонали (черт. 125). Определить объём и поверхность тела вращения.

1985. Ромб со стороной a и острым углом α вращается около прямой, проведённой через вершину острого угла перпендикулярно к его стороне. Определить объём и поверхность тела вращения.

1986. Ромб, у которого меньшая диагональ d и острый угол α, вращается вокруг стороны. Найти объём и поверхность тела вращения.

1987. Прямоугольный треугольник, площадь которого равна S, а один из острых углов α, вращается около оси, проведённой через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Определить объём тела вращения и вычислить его при $S = 126$ *см*^{2}; $\alpha = 28°10'$.

1988*. Треугольник ABC, у которого угол при вершине A тупой и равен α, а угол при вершине B равен β, вращается вокруг стороны AB, равной c. Определить объём тела вращения и вычислить его, если $c = 10{,}25$; $\alpha = 112°15'$; $\beta = 33°25'$.

1989. Прямоугольный треугольник вращается вокруг гипотенузы. Сумма гипотенузы и катета равна m, а угол между ними равен α. Определить объём тела вращения.

1990. В треугольнике ABC дана сторона $BC = a$ и углы A и B, прилежащие к стороне AB. Определить объём тела, образуемого вращением треугольника ABC около стороны AB.

1991. В параллелограме дан острый угол α и диагональ L, которая служит его высотой. Определить поверхность и объём

тела, полученного вращением параллелограма вокруг большей его стороны ($L = 14{,}60$ *см*; $\alpha = 57°12'$).

1992. Определить поверхность и объём тела, полученного вращением равнобедренного треугольника с основанием a и углом при основании α около оси, проходящей через конец основания перпендикулярно к нему. Вычислить поверхность при $a = 43{,}3$ *дм* и $\alpha = 50°40'$.

1993. Равнобедренный треугольник, у которого основание равно a, а угол при основании α, вращается вокруг боковой стороны. Определить поверхность и объём тела вращения.

1994. В треугольнике ABC углы, прилежащие к стороне AC, равны α и β, а высота BD, опущенная на эту сторону, равна h. Определить объём и поверхность тела, образованного вращением треугольника ABC вокруг стороны AC.

1995. Треугольник ABC со стороной $BC = a$ и прилежащими к ней углами α и β вращается вокруг данной стороны. Определить поверхность тела вращения и вычислить её при $a = 82{,}75$ *см*; $\beta = 48°37'$; $\alpha = 31°23'$.

1996*. Равнобедренный треугольник, основание которого равно a и угол при вершине α, вращается вокруг прямой, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через вершину и перпендикулярна к боковой его стороне. Определить объём тела вращения и вычислить его при $a = 50{,}75$; $\alpha = 53°40'$.

1997*. В прямоугольном треугольнике даны катет b и прилежащий к нему острый угол α. Этот треугольник вращается вокруг оси, проходящей вне его параллельно данному катету на расстоянии от него, равном шестой части гипотенузы, причём гипотенуза и ось вращения находятся по разные стороны от данного катета. Найти объём тела вращения и вычислить его при $b = 8{,}45$ *дм*; $\alpha = 52°40'$.

1998*. В полукруге радиуса R проведена хорда, параллельная диаметру и стягивающая дугу с центральным углом α. Концы хорды соединены с концами диаметра. Определить объём тела, образованного вращением трапеции около диаметра ($R = 16{,}64$; $\alpha = 52°48'$).

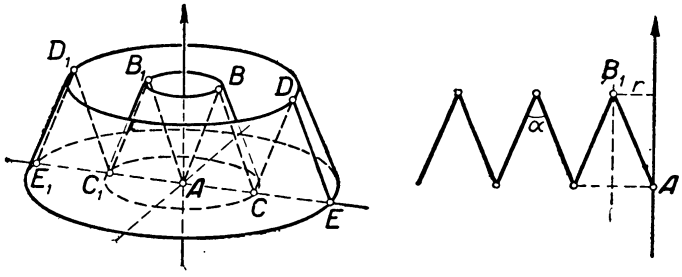
1999*. Два равнобедренных треугольника ABC и ACD имеют общее основание AC, равное b, и расположены по одну сторону от него. Определить объём тела, образованного вращением фигуры $ABCD$ вокруг общего основания AC данных треугольников, если углы при основании треугольников соответственно равны: $\angle ACB = \alpha$ и $\angle ACD = \beta$. Вычислить объём тела вращения при $b = 11{,}34$; $\alpha = 42°16'$; $\beta = 22°43'$.

2000*. В треугольнике ABC известны прилежащие к стороне AB острые углы $A = \alpha$ и $B = \beta$ и высота CD, равная h. Определить объём тела, полученного вращением данного треугольника вокруг прямой, проходящей через вершину C тре-

угольника параллельно стороне AB, и вычислить этот объём при $h = 8{,}75$ *см*; $\alpha = 42°30'$ и $\beta = 63°40'$.

2001*. В тупоугольном треугольнике ABC, в котором угол C — тупой, меньшая сторона AC составляет с большей стороной AB угол α, а сторона BC составляет угол β с высотой треугольника, проведённой из вершины тупого угла. Определить объём тела, полученного от вращения треугольника вокруг большей его стороны AB, если меньшая сторона AC равна a.

2002. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) дан периметр, равный $2p$, и угол B при вершине, равный α. Определить поверхность тела, образуемого вращением этого треугольника около прямой, проходящей через вершину B параллельно основанию AC.



Черт. 126.

2003. Плоская ломаная состоит из n равных отрезков, длиной a каждый, соединённых в виде зигзага под углом α друг к другу. Найти площадь поверхности S, образуемой вращением ломаной около оси, проходящей через один из её концов параллельно биссектрисе угла α (черт. 126).

Таблица для перевода радианной меры в градусную

Радианная мера	Градусная мера	Радианная мера	Градусная мера	Радианная мера	Градусная мера	Радианная мера	Градусная мера
1	57°17′45″	0,1	5°43′46″	0,01	34′23′	0,001	3′26″
2	114°35′30″	2	11°27′33″	2	1°08′45″	2	6′53″
3	171°53′14″	3	17°11′19″	3	1°43′08″	3	10′19″
4	229°10′59″	4	22°55′06″	4	2°17′31″	4	13′45″
5	286°28′44″	5	28°38′52″	5	2°51′53″	5	17′11″
6	343°46′29″	6	34°22′39″	6	3°26′16″	6	20′38″
7	401°04′14″	7	40°06′25″	7	4°00′39″	7	24′04″
8	458°21′58″	8	45°50′12″	8	4°35′01″	8	27′30″
9	515°39′43″	9	51°33′58″	9	5°09′24″	9	30′56″
10	572°57′28″						

ОТВЕТЫ

ГЛАВА I

4. 1) Да, 2) да, 3) нет, 4) да, 5) нет, 6) да, 7) нет, 8) нет, 9) нет, 10) нет.

5. 1) 0,1; $\frac{2}{3}$; 1; $\frac{3}{11}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) каждое число.

7. $\frac{1}{2}$. **8.** 1. **11.** 2) 49°30′; 4) 34°15′; 6) $90° - \alpha$; 7) α.

12. 1) $45° + \alpha$; 3) $60° - \frac{\alpha}{2}$. **14.** 1) $\alpha = 45°$; 2) $\alpha = 45°$.

15. Функция данного острого угла равна кофункции дополнительного угла. **17.** $\frac{1}{2}$. **18.** 0,866. **19.** 24°. **20.** 1) $\sin 10°$; 4) $\operatorname{tg} 30°30'$.

21. 1) $\sin(30° + \alpha)$; 2) $\cos(25° + \alpha)$; 3) $\operatorname{ctg}(65° - \alpha)$.
22. $\cos\alpha + \sin\alpha$. **23.** 1) 10°; 2) 15°; 3) 45°; 4) 30°.
27. 1) $\alpha < 40°$; 2) $\alpha > 72°$; 3) $\alpha < 50°$; 4) $\alpha > 25°$; 5) $\alpha > 45°$; 6) $\alpha < 45°$. **28.** 1) Тангенс; 2) котангенс. **29.** 1) $\alpha > 30°$; 3) α 60°; 6) $\alpha < 45°$; 8) $\alpha < 45°$. **30.** 1) плюс; 2) минус; 3) минус; 4) минус. **31.** $\sin 0°$; $\cos 61°$; $\sin 30°$; $\operatorname{tg} 30°$; $\cos 0°$; $\operatorname{tg} 55°$. **32.** 1) 0; 2) $(a-b)^2$. **33.** 2. **34.** 2. **35.** $0 < \sin\alpha \leqslant 1$. **36.** Если $b > 0$, то при $0° < \alpha < 45°$ $b \operatorname{tg}\alpha < b$; при $\alpha = 45°$ $b \operatorname{tg}\alpha = b$ и при $45° < \alpha < 90°$ $b \operatorname{tg}\alpha > b$. **55.** 1) $\operatorname{tg} 60° = 2\sin 60°$; 2) $\operatorname{tg} 45° = 2\cos 60°$. **57.** 1) 0; 2) 0. **58** $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. **59.** $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$. **61.** 1) 20,4 *см*; 2) 68 *см*; **62.** 1) 1,96 *м*; 2) 30,6 *дм*. **65.** 1) $b = 15{,}9$; $c = 19{,}9$; $\beta = 53°$; 2) $a = 12{,}7$; $c = 16{,}4$; $\beta = 39°40'$. **67.** 8,7 *м*. **68.** 5,9 *см*. **69.** 8,2 *см*. **70.** 28,3 *см*. **71.** 9,39 *дм*. **72.** 1,23 *м*. **73.** 95 *м*. **74.** 114 *м*. **75.** 108,5 *м*. **76.** 20,4 *м*. **77.** 18,7 *м*. **78.** 1) $a = 19{,}7$; $b = 15{,}4$; $\beta = 38°$; 2) $a = 0{,}180$; $b = 0{,}041$; $\alpha = 77°20'$. **79.** 7,7 *см* и 9,2 *см*. **80.** 40 *см*. **81.** 86,8 *см*. **82.** 256 *см*. **83.** 0,596 *м*. **84.** 25 *см* и 18 *см*. **85.** 42 *м*. **86.** Пролёт 4,6 *м*; высота 1,6 *м*. **87.** 3,5 *см*. **88.** 23,8 *кГ* и 19,1 *кГ*. **89.** 88 *кГ* и 287 *кГ*. **90.** 1) 3,2 *дм* и 9,6 *дм*; 2) 4,3 *дм* и 13 *дм*; 3) 5 *дм* и 15 *дм*. **91.** 1) $A = 33°20'$; $B = 56°40'$; $b = 33{,}4$; 2) $A = 42°20'$; $B = 47°40'$; $a = 5{,}75$. **93.** 37°. **94.** 42° и 138°. **95.** 48°36′. **96.** 91°30′. **97.** 49°. **98.** 88°. **99.** 76°; 7 *м*. **100.** 19°. **101.** 1) 82°; 2) 9°. **102.** 1) $A = 64°$; $B = 26°$; $c = 54{,}7$; 2) $A = 34°30'$; $B = 55°30'$; $c = 3{,}09$. **103.** 31°; 59°; 11,7 *см*. **104.** 31°. **105.** 51°. **106.** 66°40′. **107.** 20,6 *см*; 68°40′; 111°20′. **108.** 50°; 130°; 7 *см*.
109. 53°. **110.** 1) 35,69 *дм*; 2) 20,18 *дм* и 29,44 *дм*; 3) 11,41 *дм* и 24,28 *дм*; 4) 16,64 *дм*. **111.** 0,174 *м*. **112.** 78°28′; 78°28′; 23°04′. **113.** 396,2 *дм*.
114. 37°; 53°; 7,5 *см*, 13,3 *см*. **115.** $R = \frac{a}{2\cos\frac{\beta}{2}}$; $r = a\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right)$.
116. 28,4 *м*. **117.** 70: 1000. **118.** 72 *м*. **119.** 193 *м*. **120.** 25,5 *м*; 15,3 *м*. **121.** 84 *м*. **122.** 191,5 *кГм*. **123.** 1,63 *кГ*. **124.** 40°. **125.** 3,2 *кГ*; 1,1 *кГ*.

126. 1) 239 *кГ* и 178 *кГ*; 2) с увеличением угла φ сила растяжения троса a и сила сжатия балки b будут уменьшаться. **127.** 1) 1032 *кГ*; 2) с увеличением острого угла φ сила, действующая со стороны щеки клина на полено, уменьшается. **128.** 43,2 *мм* и 59,2 *мм*. **133.** Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и углу α; противолежащий углу катет и будет искомым отрезком; 3) построить прямоугольный треугольник по катету a и углу α, прилежащему к этому катету; искомым отрезком будет гипотенуза треугольника; 5) построить $\sqrt{ax}$, где $x = b\cos\alpha$.

135. 51 *см*. **136.** 1. **137.** 30° и 60°; $\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. **138.** 45°; $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$.

139. $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **140.** $\cos\beta = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{4}{3}$. **141.** 24,4 *см*.

142. 6,2 *см* и 9,9 *см*. **143.** 52°30′; 7,1 *кГ*. **144.** 106°. **145.** 42°.
146. 7,2 *см* и 2,8 *см*. **148.** $S = ab\sin\alpha$. **149.** $S = d^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
Из всех прямоугольников с одной и той же длиной диагонали наибольшую площадь имеет квадрат ($\alpha = 45°$). **150.** $b = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; $S = \frac{a^2}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

151. $S = \frac{4ab}{\sin\alpha}$. С изменением угла от 0° до 90° площадь параллелограма уменьшается, приближаясь как угодно близко к площади прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$.

152. $S = \frac{4r^2}{\sin\alpha}$. При постоянном r с увеличением α площадь ромба уменьшается, приближаясь к площади квадрата со стороной $2r$.

153. $a = \frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; $S = \frac{1}{2}d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Если d — постоянно, то при $\alpha = 90°$ ромб становится квадратом и площадь будет наибольшей.

154. $S = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha$ (прямоугольник составлен из четырёх равновеликих треугольников). При постоянной длине диагонали прямоугольника с увеличением угла между диагоналями от 0° до 90° площадь прямоугольника возрастает от 0 до $\frac{1}{2}d^2$.

ГЛАВА II

155. −30°; −120°; −360°; −780°. **156.** 60°; 432°; 960°. **157.** −108°.
158. 1) −1350°; 2) 1125°. **159.** −900°.
162. 1) $150° + 360°k$; 2) $-30° + 360°k$ или $330° + 360°k$.
163. 1) 15°; 135°; 255°; 2) 150°; 330°; 3) 15°; 75°; 135°; 195°; 255°; 315°; 4) 120°; 240°. **164.** 360°.

168. 1) $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}047$; 2) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$ и $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$; 3) $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094$; 4) $\frac{5\pi}{6} \approx 2{,}618$.

169. $30°\left(\frac{\pi}{6} \approx 0{,}524\right)$ и $75°\left(\frac{5\pi}{12} \approx 1{,}309\right)$.

170. 1) $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$; 2) $\frac{\pi}{36} \approx 0{,}0873$; 3) $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \approx -2{,}3562$; 5) $\frac{5\pi}{4} \approx 3{,}9270$; 6) $-\frac{9\pi}{10} \approx -2{,}8274$.

171. 1) 180°; 2) 90°; 3) $-135°$; 4) 60°; 5) 18°; 6) $-24°$; 7) 150°; 8) $-105°$.
172. 1) 57°17′45″; 2) 114°35′30″; 3) $-171°53'14''$; 4) 143°14′22″; 5) 5°43′46″; 6) 34′23″; 7) $-120°19'16''$; 8) $-31°30'45''$.

173. 1) 11°15′; 2) $\frac{\pi}{16} \approx 0{,}196$. **174.** 30°56′23″; 219°26′34″; 120°39′54″; 201°13′22″; 709°12′26″.

175. 0,0175; 0,0873; 0,5236; 0,7854; 1,0472; 0,6283; 1,8850; 2,3562; 3,7821; 2,2378; 5,0516. **176.** 1) 31,25 *см*; 2) 62,83 *см*. **177.** 100 *см*. **178.** 1) 1; 2) 2.
179. 720 000 градус/сек; 4000 рад. π/сек.
180. 1) 1 тысячная соответствует 3′,6; 2) 10; 50; 100; 200; 600; 800.
181. $\frac{1000L}{n}$. **182.** 800 *м*. **183.** 1 час соответствует 15°; 1 минута соответствует $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$, или 15′; 1 секунда соответствует $\left(\frac{1}{240}\right)^\circ$, или 15″.

184. 2 час. 30 мин. 17 сек. **185.** 131°52′30″.
193. Нет, так как $|\operatorname{tg}\alpha| = |\sin\alpha| : |\cos\alpha|$ и $|\cos\alpha| \leqslant 1$.
194. Для значений $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ функция $\operatorname{tg} x$ не определена.

195. Нет, так как $|\operatorname{ctg}\alpha| = |\cos\alpha| : |\sin\alpha|$ и $|\sin\alpha| \leqslant 1$.
198. 1) $2\sin\alpha > \sin^2\alpha$; 2) $2\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}^2\alpha$, если $0 < \operatorname{tg}\alpha < 2$; $2\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $2\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha > 2$.
200. $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$; $-\infty < \operatorname{tg} x < +\infty$; $-\infty < \operatorname{ctg} x < +\infty$. **201.** 1) $0 \leqslant 1 + \sin x \leqslant 2$; 2) $0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant 2$.
202. 1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; 2) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; 3) $0 < x < \pi$; 4) $\pi < x < 2\pi$; 5) 0; π и 2π.

203. 1) $\pi < x < 2\pi$; 2) $0 < x < \pi$; 3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; 4) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; 5) $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$. **204.** 1) На всём отрезке от 0 до π, исключая значение $x = \frac{\pi}{2}$, где функция $\operatorname{tg} x$ не определена; 2) таких значений нет; 3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; 5) 0 и π; 6) $\frac{\pi}{2}$. **205.** 1) Таких значений нет; 2) $0 < x < \pi$; 3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; 5) $\frac{\pi}{2}$; 6) 0 и π. **206.** Во 2-й четверти.

207. 1) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$; 3) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$.

208. 1) $0 \leqslant |\cos x| \leqslant 1$; 2) $-1 \leqslant \sin|x| \leqslant 1$.
209. 1), 2) и 8) $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$; 3) и 4) все; 5), 6), 7) и 9) $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$; 10) $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, если $a \neq b$; все, если $a = b$; 11) $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$, если $a = b$; все, если $a \neq b$; 12) $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$; 13) $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$.
210. Косинус, тангенс, котангенс и секанс, если угол тупой. **211.** Нет.
212. Положительный знак в примерах 1), 2), 3), 4), 5) и 6); отрицательный знак в примерах 7), 8), 9) и 10). **213.** Положительный знак в примерах 1), 3), 5), 6), 7), 9) и 10). Отрицательный знак в примерах 2), 4) и 8).
214. 1) $200° < \alpha < 340°$; 2) $150° < \alpha < 210°$; 3) $0° < \alpha < 45°$; $90° \leqslant \alpha \leqslant 225°$ и $270° \leqslant \alpha \leqslant 360°$; 4) 45°, 135°; 225° и 315°; 5) $30° \leqslant \alpha \leqslant 150°$ и $180° \leqslant \alpha \leqslant 350°$.
215. 1) 5 и 1; 2) 5 и -3; 3) 2,25 и 0,25; 4) 10 и 1.

216. При $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$ функция принимает наименьшее значение, равное $\frac{1}{2}$; 2) наименьшее значение, равное $\frac{1}{2}$, функция принимает при $x=\pi(2k+1)$. **217.** $\sin 1$ — синус угла (дуги) в один радиан.
218. 1) Отрицательное; 2) положительное; 3) положительное; 4) отрицательное. **219.** 1) $\sin 1>\sin 10°$; 2) $\cos 1°>\cos 1$; 3) $\operatorname{ctg} 0{,}1>1$.
220. 1) $\operatorname{tg}(\cos 0)>\sin 1$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)>\cos 1$. **221.** 1) $\alpha>\sin\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha>\alpha$.
222. 1) 0,1987; 2) 0,7317; 3) 10,9834; **223.** 1) 0,3012; 2) 2,5574.
224. 1) 0,00; 2) 0,00; 3) 0,00; 4) 0,01; 5) 0,02; 5) 0,04; 7) 0,06; 8) 0,08; 9) 0,21; 10) 0,16. **225.** Наибольшее значение, равное $\sin 1\approx 0{,}8415$, функция $\sin(\sin x)$ принимает при $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; наименьшее значение, равное $\sin(-1)\approx -0{,}8415$, при $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **226.** Наибольшее значение, равное 0,4597 (приближённо), функция достигает при $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; наименьшее значение, равное 0, —при $x=\pi k$.
228. 1) 5; 2) -7; 3) $-b$; 4) $n-p$; 5) -6;
229. 1) а) 1; б) 1; в) -1; г) -1; 2) а) -1; б) 2. **232.** $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

Указание. Воспользоваться утверждением задачи 230.
233. 1) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$; 2) $2\frac{1}{12}$. **234.** 1. **235.** 0.

237. 1) $0{,}5\sqrt{3}$; 2) $1+\sqrt{2}$; 3) $0{,}5(2\sqrt{3}+3)$. **238.** 0. **239.** $(a-b)^2$.

240. $(m+n)^2$. **241.** $(a+b)^3$. **242.** $(1-p)^3$. **244.** 1) $\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

2) $0\leqslant x<\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{6}$. **245.** 1) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$; 2) $0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}<x\leqslant\pi$;

3) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. **246.** 1) $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$; 2) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$. **247.** $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$.

248. 1) Минус; 2) плюс. **249.** 1) 0,4794; 2) —0,4161;
3) 0,5463; 4) 0,3894. **255.** 1) 43°; 2) 30°42′; 3) 74°42′; 4) 55°; 5) 31°; 6) 45°; 7) 44°; 8) 45°. **256.** 1) 232°; 2) 155°; 3) 235°; 4) 116°; 5) 274°; 6) 121°.
257. 1) 45° и 135°; 2) 135°; 3) 95°; 4) 59°.
258. 1) 125° и 145°; 2) 75° и 255°; 3) 45°; 135°; 225° и 315°;
4) 45°; 135°; 225° и 315°; 5) 30°; 150°; 210° и 330°; 6) 270°. *Указание.* Предварительно определить $\sin x$ из квадратного уравнения;

7) 80°; 320° и 200°; 8) $\sin x=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785$; $x_1\approx 0{,}903$; $x_2\approx 2{,}239$;

9) $\operatorname{tg} x=\pi$; $x_1\approx 1{,}263$; $x_2\approx 4{,}404$.

259. 1) Существует, так как $\sin^2 x+\cos^2 x=\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=1$;

2) не существует; 3) не существует; 4) существует.
260. Синус и косеканс; косинус и секанс; тангенс и котангенс.
263. 1) 0,96; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) $1\frac{1}{12}$; 4) $\frac{15}{17}$; 5) $\frac{7}{25}$; 6) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Данная функция / Искомая функция	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\pm\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$		$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$		$\pm\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$	$\pm\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

262.

	sin α	cos α	tg α	ctg α	sec α	cosec α
1	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\pm\frac{3}{5}$	$\pm\frac{4}{3}$	$\pm\frac{3}{4}$	$\pm\frac{5}{3}$	$1\frac{1}{4}$
2	$(-0{,}6)$	$\pm 0{,}8$	$\mp 0{,}75$	$\mp\frac{4}{3}$	$\pm 1{,}25$	$-1\frac{2}{3}$
3	$\pm\frac{28}{53}$	$\left(\frac{45}{53}\right)$	$\pm\frac{28}{45}$	$\pm 1\frac{17}{28}$	$1\frac{8}{45}$	$\pm 1\frac{25}{28}$
4	$\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)$	$\mp\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\mp\frac{2}{\sqrt{5}}$	$-1\frac{1}{2}$	$\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$
5	$\pm\frac{9}{41}$	$\pm\frac{40}{41}$	0,225	$4\frac{4}{9}$	$\pm 1\frac{1}{40}$	$\pm 4\frac{5}{9}$
6	$\pm 0{,}96$	$\pm 0{,}28$	$\left(-3\frac{3}{7}\right)$	$-\frac{7}{24}$	$\pm\frac{25}{7}$	$\pm\frac{25}{24}$
7	$\pm\frac{8}{17}$	$\pm\frac{15}{17}$	$\frac{8}{15}$	$\left(1\frac{7}{8}\right)$	$\pm 1\frac{2}{15}$	$\pm 2\frac{1}{8}$
8	$\pm\frac{5}{13}$	$\pm\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$	$(-2{,}4)$	$\pm 1\frac{1}{12}$	$\pm 2{,}6$
9	$\pm\frac{21}{29}$	$-\frac{20}{29}$	$\pm 1\frac{1}{20}$	$\pm\frac{20}{21}$	$(-1{,}45$	$\pm 1\frac{8}{21}$
10	$\frac{20}{101}$	$\pm\frac{99}{101}$	$\pm\frac{20}{99}$	$\pm 4\frac{19}{20}$	$\pm 1\frac{2}{99}$	$\left(5\frac{1}{20}\right)$
11	$\left(\frac{m}{n}\right)$	$\pm\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{n}$	$\pm\frac{m}{\sqrt{n^2-m^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{m}$	$\pm\frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}}$	$\frac{n}{m}$

264. 1) 0,6; 2) $-2\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{20}{99}$; 4) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; 5) $-3\frac{3}{7}$; 6) $0{,}5\sqrt{5}$.

265. 1) $-\frac{15}{17}$; 2) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; 3) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{5}{12}$; 5) $-\frac{8}{17}$; 6) $-|a|$; $|a|\leqslant 1$.

266. 1) $-\frac{12}{13}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $-1\frac{7}{8}$; 4) 0,8; 5) -2; 6) $-1\frac{2}{3}$.

267. $0\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$, поэтому $-1\leqslant a\leqslant 0$. $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{-2a-a^2}$, где $-2\leqslant a\leqslant 0$. **268.** $-\sqrt{2a+a^2}$, где $a\leqslant -2$.
269. $\cos^2\alpha$. **270.** $\sin^2\alpha$. **271.** $-\sin^2\alpha$. **272.** $\cos^2\alpha$. **273.** 2. **274.** $\sec^2\alpha$.
275. 1. **276.** $\operatorname{tg}^2\alpha$. **277.** $-\operatorname{ctg}^2\alpha$.
278. $\operatorname{ctg}\alpha$. **279.** $\operatorname{tg}\alpha$. **280.** $\operatorname{ctg}^2\alpha$.
281. $\operatorname{tg}^2\beta$. **282.** $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. **283.** $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$.
284. 1. **285.** 1. **286.** $\cos\beta$.
287. $\operatorname{tg}^2\beta$. **288.** $2\sin\alpha$. **289.** $\cos^2\alpha$.
290. $\cos^2\alpha$. **291.** $-\sin^2\alpha$. **292.** $1-\cos\alpha$.
293. $-(1+\sin\alpha)$. **294.** $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. **295.** $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
296. 1. **297.** 2. **298.** 4.
299. $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **300.** 1. **301.** $\sin\alpha-\cos\alpha$.
302. $\cos\alpha-\sin\alpha$. **303.** $2\operatorname{cosec}\alpha$. **304.** $2\sec\alpha$.
305. $2\sec^2\alpha$. **306.** $\sec^2\alpha$. **307.** $\operatorname{cosec}^2\alpha$.
308. $\operatorname{ctg}^6\alpha$. **309.** $\operatorname{cosec}\alpha$. **310.** $\sec\alpha$.
311. $2|\operatorname{cosec}\alpha|$. **312.** 4, если α — угол I или III четверти; -4, если α — угол II или IV четверти. **320.** $\sin^4\alpha$.
321. 5. **322.** а) 0,5; б) $-0{,}1$.
323. $\frac{3}{2}$, если α — угол I четверти; $-\frac{3}{2}$, если α — угол III четверти.

324. 1) $0{,}5\cdot(p^2-1)$; 2) 1; 3) $\pm\sqrt{2-p^2}$; 4) $0{,}5(1-p^4+2p^2)$.
325. 1) m^2-2; 2) $m(m^2-3)$. **326.** ± 3. **327.** 28.
328. 1) Имеем: $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)-2=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha-1)^2}{\operatorname{tg}\alpha}\geqslant 0$, так как $\operatorname{tg}\alpha>0$ $(0<\alpha<90°)$ и $(\operatorname{tg}\alpha-1)^2\geqslant 0$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\geqslant 2$. Знак равенства имеет место при $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

346. $x+2=y^2$. **347.** 1) $y_{наиб.}=3$; $y_{наим.}=2$; 2) $y_{наиб.}=1$; $y_{наим.}=-2$. **348.** 1) $y=0{,}5\sin^2(\cos x)+0{,}5\cos^2(\cos x)+0{,}5\sin^2(\cos x)=0{,}5\times[1+\sin^2(\cos x)]$. Так как наибольшее и наименьшее значения $\sin^2(\cos x)$ равны соответственно $\sin^2 1$ (при $x=0$) и 0 $\left(\text{при } x=\frac{\pi}{2}\right)$, то $y_{наиб.}=0{,}5\cdot(1+\sin^2 1)\approx 0{,}854$; $y_{наим.}=0{,}5$; 2) $y_{наиб.}\approx 0{,}124$ при $x=\frac{\pi}{2}$; $y_{наим.}=-2$ при $x=0$. **349.** Если $a>b$, то $y_{наиб.}=a$ и $y_{наим.}=b$; если $a=b$, то $y=a$ при любых значениях x (y — постоянная функция); если $a<b$, то $y_{наиб.}=b$ и $y_{наим.}=a$.
Указание. Представить данную функцию в виде: $y=b+(a-b)\sin^2 x$.
350. 60°. **351.** $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. **352.** $\frac{3\pi}{4}$. **353.** 45°. **354.** $\frac{\pi}{4}$.

358. Периодом $\sin x$ и $\cos x$ является число 2π; периодом $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — число π. Периодичность тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ можно записать соответственно равенствами:

$$\sin(x+2\pi k)=\sin x;$$
$$\cos(x+2\pi k)=\cos x;$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x;$$
$$\operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg} x, \text{ где } k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$$

359. 1) Периодическая, с периодом 2π; 2) не периодическая; 3) периодическая, с периодом 2π; 4) периодическая, с периодом π; 5) периодическая, с периодом 2π; 6) периодическая, с периодом 2π. **361.** 1) 2π; 2) π; 3) 4π; 4) 2π; 5) $\frac{\pi}{2}$; 6) 2π; 7) $2n\pi$; 8) π; 9) π; 10) 40π; 11) π; 12) 2π. **363.** 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$. **371.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $2\cos(a-b)$.

372. 2) $y(-x)=\sin(-x)\cdot\operatorname{tg}(-x)=(-\sin x)\cdot(-\operatorname{tg}x)=\sin x\cdot\operatorname{tg}x=y(x)$.
373. 1) $y(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-(x+\sin x)=-y(x)$.
374. Чётные функции: 2), 4), 7) и 8); нечётные функции: 1), 5) и 9); ни чётные, ни нечётные функции: 3) и 6).
375. $\cos 12°$. **376.** $\sin 37°$. **377.** $\operatorname{ctg} 29°$. **378.** $\operatorname{tg} 40°$. **379.** $\operatorname{cosec} 3°$. **380.** $\sec 41°$. **381.** $\sin 12°$. **382.** $-\sin 33°$. **383.** $-\operatorname{tg} 6°$. **384.** $-\operatorname{ctg} 34°$. **385.** $-\sin 36°$. **386.** $-\cos 20°$. **387.** $\operatorname{ctg} 7°$. **388.** $\operatorname{ctg} 14°$. **389.** $-\sec 42°$. **390.** $-\cos 5°$. **391.** $\operatorname{tg} 29°$. **392.** $-\operatorname{ctg} 7°$. **393.** $\sec 44°$. **394.** $-\sec 15°$. **395.** $-\cos 33°$. **396.** $\cos 1°$. **397.** $-\operatorname{tg} 4°$. **398.** $-\operatorname{tg} 19°$. **399.** $-\cos 27°$. **400.** $\sin 9°$. **401.** $-\operatorname{ctg} 15°$. **402.** $\operatorname{tg} 15°$. **403.** $-\sec 44°$. **404.** $\operatorname{cosec} 44°$. **405.** $\cos 42°$. **406.** $-\cos 19°$. **407.** $-\operatorname{tg} 38°$. **408.** $\operatorname{tg} 22°$. **409.** $-\cos 28°$. **410.** $-\sin 30°$. **411.** $-\sin 40°$. **412.** $\operatorname{ctg} 31°$. **413.** $\operatorname{tg} 0{,}2\pi$. **414.** $-\sec\frac{\pi}{5}$. **415.** $-\operatorname{ctg} 0{,}14\ldots$ **416.** $\sin 0{,}71\ldots$ **417.** $-\sin 0{,}14\ldots$ **418.** $-\operatorname{ctg} 0{,}28\ldots$ **419.** $\sin 28°$. **420.** $-\cos 20°$. **421.** $-\operatorname{tg} 15°$. **422.** $\operatorname{ctg} 22°$. **423.** $-\sec 7°$. **424.** $-\operatorname{cosec} 20°$. **425.** $-\operatorname{tg} 27°$. **426.** $-\sin 56°$. **427.** $\cos 43°$. **428.** $\sin 39°$. **429.** $\operatorname{tg} 62°$. **430.** $-\sec 77°$. **431.** $-\operatorname{ctg} 33°$. **432.** $-\operatorname{tg} 37°$. **433.** $-\sec 49°$. **434.** $\cos 25°$. **435.** $-\sin 32°$. **436.** $-\operatorname{ctg} 62°$. **437.** $\operatorname{cosec} 31°$. **438.** $\sin 23°$. **439.** $-\sec 74°$. **440.** $\cos 43°$. **441.** $\sin 52°$. **442.** $-\operatorname{ctg} 22°$. **443.** $-\operatorname{tg} 0{,}3\pi$. **444.** $-\sin 0{,}1\pi$. **445.** $\operatorname{ctg} 0{,}2\pi$. **446.** $\cos 0{,}4\pi$. **447.** $\sec 0{,}2\pi$. **448.** $\operatorname{cosec} 0{,}3\pi$. **449.** $-\operatorname{ctg} 1{,}14\ldots$ **450.** $-\cos 0{,}85\ldots$ **451.** $-\sin 0{,}28\ldots$ **452.** $\operatorname{tg} 0{,}14\ldots$ **453.** $\cos 35°$. **454.** $-\operatorname{ctg} 8°$. **455.** $\sin 82°$. **456.** $-\operatorname{cosec} 73°$. **457.** $-\operatorname{tg} 48°$. **458.** $\operatorname{cosec} 42°$. **459.** $\sec 54°$. **460.** $\cos 62°$. **461.** $\sin 50°$. **462.** $-\operatorname{ctg} 19°$. **463.** $\operatorname{tg} 26°$. **464.** $-\sec 65°$. **465.** $-\operatorname{tg} 70°$. **466.** $-\sin 40°$. **467.** $\operatorname{cosec} 20°$. **468.** $-\sec 9°$. **469.** $-\cos 42°$. **470.** $-\sin 51°$. **471.** $-\cos 79°$. **472.** $-\sin 21°$. **473.** $\operatorname{tg} 24°$. **474.** $-\sin 53°$. **475.** $\operatorname{ctg} 2°$. **476.** $\cos 65°$. **477.** $-\operatorname{tg} 62°$. **478.** $-\sin 23°$. **479.** $-\operatorname{ctg} 33°$. **480.** $\sec 0{,}2\pi$. **481.** $\operatorname{tg} 0{,}3\pi$. **482.** $\cos 0{,}4\pi$. **483.** $\operatorname{ctg} 0{,}1\pi$. **484.** $\sin 0{,}1\pi$. **485.** $-\operatorname{cosec} 0{,}36\pi$. **486.** $\cos 0{,}42\ldots$ **487.** $\operatorname{ctg} 0{,}99\ldots$ **488.** $-\sin 1{,}42\ldots$ **489.** $\sin 29°$. **490.** $-\cos 14°$. **491.** $-\sin 10°$. **492.** $-\sin 15°$. **493.** $\operatorname{ctg} 30°$. **494.** $\operatorname{tg} 20°$. **495.** $-\cos 20°$. **496.** $\sec 37°$. **497.** $\operatorname{ctg} 43°$. **498.** $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$. **499.** $\cos 0{,}1\pi$. **500.** $-\cos 0{,}2\pi$. **501.** $\operatorname{tg} 0{,}2\pi$. **502.** $-\sec 0{,}07\pi$. **503.** $\sec\frac{\pi}{9}$. **504.** $\cos 0{,}21\ldots$ **505.** $-\operatorname{tg} 0{,}22\ldots$ **508.** 1. **509.** 1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $-\sqrt{6}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) 0; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) $-\frac{1}{2}$. **510.** 1) 0,7431; 2) 0,4848; 3) $-0{,}5299$; 4) 0,6249; 5) 0,4226; 6) $-0{,}1763$; 7) $-0{,}8008$; 8) 0,1322; 9) $-0{,}2773$. **511.** 0. **512.** 0. **513.** $2\cos 21°$. **514.** 0. **515.** 0. **516.** 0. **517.** $2\cos\alpha$. **518.** $\operatorname{tg}\alpha$. **519.** 3. **520.** -1. **521.** 1. **522.** 1. **523.** $-\sin^3\alpha$. **524.** 0. **525.** $\sin^2 25°$. **526.** $\sin^2 x$. **527.** $2\sin^2 x$. **528.** 1. **542.** $\frac{1}{2}$. **546.** 30°; 60°; 120°; 150°; 210°; 240°; 300°; 330°.

547. 1) $\frac{\pi}{4}(4k+1)$; 2) $\frac{\pi}{6}(6k+5)$; 3) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 4) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 5) $\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$.

548. $360°k+45°$ и $360°k+135°$. Например, 5085° и 5175° (при $k=14$). **549.** $360°k \pm 150°$. **550.** 1,020. **551.** 1) $180°k-45°$; 2) $360°k \pm 135°$; 3) $360°k+30°$ и $360°k+150°$; 4) $180°k+75°$. **552.** 1) $2\pi k \pm \frac{3\pi}{4}$; 2) $180°k+135°$; 3) $360°k+15°$ и $360°k+105°$. **553.** 1) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $360°k-100°$ и $360°k+140°$. **554.** 1) $\frac{\pi}{4}(4k+1)$; 2) $45°(4k-1)$; 3) $60°(3k+1)$; 4) $45°(4k+1)$. **555.** $180°k+23°$. **556.** Множество всех действительных чисел. **560.** 2) Часть кривой, соответствующая периоду функции (2π), неизменно повторяется; 4) ординаты, восставленные из точек $(x, 0)$ и $(x \pm \pi, 0)$ оси абсцисс, имеют одинаковую длину, но противоположное направление; 5) кривая расположена симметрично относительно начала координат. **561.** 6) Наибольшее положительное значение синуса равно 1; оно достигается при $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **563.** 1) График функции $y=\sin(x+a)$ есть синусоида, смещённая по оси x на величину $-a$. 2) График функции $y=2\sin x$ есть синусоида, растянутая в 2 раза в направлении оси y (амплитуда синусоиды увеличена в 2 раза). 3) График функции $y=\frac{1}{2}\sin x$ есть синусоида, сжатая в направлении оси y в 2 раза (амплитуда синусоиды уменьшена в два раза). 4) График функции $y=\sin 2x$ есть синусоида, сжатая в направлении оси x в два раза (период уменьшился в два раза). 5) График функции $y=1+\sin x$ есть синусоида, смещённая в направлении оси y на 1. 6) График функции $y=\sin(\sin x)$ есть синусоида, заключённая в полосе между двумя прямыми $y=\sin 1$ и $y=-\sin 1$. **564.** Множество всех действительных чисел. **565.** 4) Кривая расположена симметрично относительно оси ординат. **568.** Наименьшее значение, равное -1, функция $y=\cos x$ принимает при $x=\pi(2k+1)$. **573.** График функции $y=\cos x$ есть синусоида, сдвинутая влево по оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{2}$.

577. 1) Множество действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) множество действительных чисел $x \neq \pi k$. **579.** Функция $\operatorname{tg} x$ возрастает при всех (допустимых) значениях x; функция $\operatorname{ctg} x$ убывает при всех (допустимых) значениях x. **583.** Да, бесчисленное множество точек $\left[\frac{\pi}{4}(4k+1); 1\right]$ и $\left[\frac{\pi}{4}(4k-1); -1\right]$. **584.** Для значений $x=\pi k$ функция $\operatorname{ctg} x$ не определена.

589. 0. **590.** 0. **591.** 0; $\frac{\pi}{2}$; π. **592.** 1) Три; 2) бесчисленное множество.

593. $\approx 4{,}49$. **594.** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$.

ГЛАВА III

595. 1) $\cos\alpha$; 2) $\sqrt{3}\cdot\sin\alpha$; 3) $\sqrt{2}\sin\alpha$; 4) $\sqrt{3}\cos\alpha$.

596. 1) $\frac{56}{65}$; 2) $-\frac{16}{65}$; 3) $\frac{33}{65}$; 4) $\frac{63}{65}$. **597.** 1) $\sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$. *Указание.* Заменить 15° через $45°-30°$; 2) $\sin 75° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sqrt{3}-1)$. *Указание.* Заменить 75° через $30° + 45°$; 3) $\sin 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sqrt{3}+1)$; $\cos 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$. *Указание.* Заменить 105° через $45° + 60°$.

598. 7) $\cos(270° \pm \alpha) = \cos 270°\cdot\cos\alpha \mp \sin 270°\cdot\sin\alpha = \pm\sin\alpha$.

599. $\frac{1}{6}(3+\sqrt{6})$. **600.** $\frac{\sqrt{10}}{20}(1-3\sqrt{3})$. **601.** $0{,}4-0{,}3\sqrt{3}$. **602.** $\frac{8+15\sqrt{3}}{34}$.

603. 1) $-\frac{4}{5}$; 2) $-\frac{44}{125}$; 3) $-\frac{3}{5}$; 4) $-\frac{117}{125}$. **604.** $\frac{140}{221}$. **605.** $\frac{24}{145}$.

606. $\frac{1288}{1313}$. **607.** $\sin 25°$. **608.** $\cos 11°$. **609.** $\sin 3{,}14 \approx 0$. **610.** $\sin 10°$.

611. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta$; $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cdot\cos\alpha$.
612. $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta$; $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\cdot\sin\beta$.
613. 1. **614.** $\cos\beta$. **615.** 1. **616.** 1. **617.** $-0{,}5\operatorname{cosec} 5°$. **618.** $-2\cos 0{,}1\pi$.
619. $2\cos 10°$. **620.** 0. **621.** $\sin 23°\cdot\cos 23°\cdot\cos 5°$. *Указание.* Заменить 51° через $28° + 23°$. **622.** $\sin 1°$. *Указание* Заменить 121° через $120° + 1°$ и 241° через $240° + 1°$. **623.** $\sin 40°$. Решение. $\sin(30° - 10°) + 2\sin(30°+10°) - \cos 10° = \sin 30°\cdot\cos 10° - \sin 10°\cdot\cos 30° + 2\sin 30°\cdot\cos 10° + 2\sin 10°\cdot\cos 30° - \cos 10° = \sin 30°\cdot\cos 10° + \sin 10°\cdot\cos 30° = \sin(30° + 10°) = \sin 40°$. **631.** Решение. Преобразуем левую часть: $\sin 1° + \cos 1° - 2\sin 23°\cdot(\cos 22° + \sin 22°) = \sin(23° - 22°) + \cos(23° - 22°) - 2\sin 23°\cdot(\cos 22° + \sin 22°) = \sin 23°\cdot\cos 22° - \sin 22°\cdot\cos 23° + \cos 23°\cdot\cos 22° + \sin 23°\cdot\sin 22° - 2\sin 23°\cdot\cos 22° - 2\sin 23°\cdot\sin 22° = -(\sin 23°\cdot\cos 22° + \sin 22°\cdot\cos 23°) + (\cos 23°\cdot\cos 22° - \sin 23°\cdot\sin 22°) = -\sin 45° + \cos 45° = 0$. **632.** *Указание.* Привести к функциям острых положительных углов, меньших 45°, и заменить 35° через 40° — 5°.
637. $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$; $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma - \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$. **638.** 1) 0,178; 2) 0,612.
640. *Указание.* Воспользоваться формулой $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$.
642. 1) $90°(2k+1)$; 2) $180°k$; 3) $180°k$; 4) уравнение не имеет решений.
643. $45°(2k+1)$. **644.** $120°k$. **645.** $90°(2k+1)$ и $60°(6k \pm 1)$.

646. $\frac{\pi}{6}(6k-1)$. **647.** $180°(2k+1)$. **648.** 1) $\frac{11}{13}$; 2) $\frac{1}{17}$. **649.** 0,2.

650. 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $2+\sqrt{3}$; 3) $-(2+\sqrt{3})$. **651.** 1) 5; 2) $-\frac{1}{5}$. **652.** $\frac{7}{17}$.

653. $2+\sqrt{3}$. **654.** $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}$.

655. 1. **656.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **657.** $-\sqrt{3}$. **658.** $\sqrt{3}$. **659.** 1. **660.** 0.

661. $\operatorname{tg} 3{,}14 \approx \operatorname{tg}\pi = 0$. **662.** $\operatorname{tg} 0{,}78 \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. **663.** $\operatorname{ctg} 15°$. *Указание.* Заменить 3 через $\operatorname{ctg}^2 30°$. **664.** $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$. **665.** 1. *Указание.* $50° = 45° + 5°$; $1 = \operatorname{tg} 45°$. **673.** 225°. **674.** 45°. **675.** $45°\cdot(4k-1)$. **679.** $180°\cdot k - 15°$.
680. $\frac{\pi k}{2} - \frac{4\pi}{15}$. **681.** $30°\cdot(6k-1)$. **682.** 1) $\sin 2\alpha = 0{,}5376$; $\cos 2\alpha = -0{,}8432$; $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{336}{527}$; 2) $\sin 2\alpha = -\frac{240}{289}$; $\cos 2\alpha = -\frac{161}{289}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{240}{161}$.

683. $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$; $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$. **684.** $1\frac{1}{3}$.

685. $\sin 2\alpha = \pm 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm 2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$;
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

686. $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$; $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

687. $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

690. 1) $2\cos\alpha > \cos 2\alpha$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$, если $0° < \alpha < 45°$; $\operatorname{tg} 2\alpha < 2\operatorname{tg}\alpha$, если $45° < \alpha < 90°$. **691.** 1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; 2) $\sin 4\alpha = \pm 4\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot(1-2\sin^2\alpha)$.

$\cos 4\alpha = 1 - 8\cos^2\alpha + 8\cos^4\alpha$; $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha\cdot(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^4\alpha - 6\operatorname{tg}^2\alpha}$.

692. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **693.** $\pm 0{,}8$; $0{,}6$. **694.** $\pm\frac{9}{41}$; $\frac{40}{41}$. **695.** $\frac{24}{25}$; $-\frac{7}{25}$.

696. $\frac{240}{289}$ и $-\frac{161}{289}$. **697.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $\approx 5\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 5$. **698.** $\cos 10°$. **699.** $-\cos 20°$. **700.** 1) 1; 2) 1.

701. 1) $\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha$. **702.** 1) $\cos 4\alpha$; 2) $\frac{1}{8}\cos 4\alpha$. **703.** $\sin 2\alpha$. **704.** 1.

705. $2\operatorname{cosec}\alpha$. **706.** $2\operatorname{ctg}\alpha$. **707.** $\sin 2\alpha$. **708.** $\cos 2\alpha$. **709.** $\operatorname{tg} 2\alpha$. **710.** $\sin 2x$.

711. $\cos 2\alpha$. **712.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 4) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$; 5) $\sqrt{5}+1$.

727. *Указание* Умножить и разделить левую часть на $\cos 10°$. **728.** Р е ш е н и е. $1 - \sin^2(2+1) + 1 - \sin^2(2-1) - \cos 2\cdot 2\cos 2\cdot 1 = 2 -$
$-(\sin 2\cdot\cos 1 + \sin 1\cdot\cos 2)^2 - (\sin 2\cdot\cos 1 - \sin 1\cdot\cos 2)^2 - (\cos^2 2 - \sin^2 2)\times$
$\times(\cos^2 1 - \sin^2 1) = 2 - \sin^2 2\cdot\cos^2 1 - \sin^2 1\cdot\cos^2 2 - 2\sin 1\cdot\sin 2\cdot\cos 1\cdot\cos 2 -$
$-\sin^2 2\cos^2 1 - \sin^2 1\cos^2 2 + 2\sin 1\cdot\sin 2\cdot\cos 1\cdot\cos 2 - \cos^2 1\cos^2 2 +$
$+\sin^2 2\cdot\cos^2 1 + \sin^2 1\cos^2 2 - \sin^2 1\cdot\sin^2 2 = 2 - \cos^2 1\cdot(\sin^2 2 + \cos^2 2) -$
$-\sin^2 1\cdot(\cos^2 2 + \sin^2 2) = 2 - (\cos^2 1 + \sin^2 1) = 1$.

729. 1) $y_{наиб.} = 1$; $y_{наим.} = \frac{1}{2}$. *Указание.* Представить данную функцию в виде: $y = 1 - 0{,}5\cdot\sin^2 2x$; 2) $y_{наиб.} = 1$; $y_{наим.} = \frac{1}{4}$. *Указание.* Представить данную функцию в виде: $y = 1 - 0{,}75\cdot\sin^2 2x$. **731.** $45°\cdot(2k+1)$.

732. $180°\,k$. **733.** $\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **734.** $15° + 180°k$ и $75° + 180°k$.

735. $15°(4k+1)$. **736.** $30°(6k+1)$. **737.** $15° + 180°k$ и $75° + 180°k$.

738. $\frac{8}{17}$; $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{15}$. **739.** $-\frac{5}{13}$; $-\frac{12}{13}$ и $\frac{5}{12}$. **740.** $\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{4}{3}$.

741. $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{5}$.

742. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; и $\sqrt{2}-1$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $2-\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ и $2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2-\sqrt{3}$. **743.** $\frac{\sqrt{8}}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

744. $1\frac{1}{3}$ и 3. **745.** $\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

746. -5 и $-\frac{1}{5}$. **753.** $\operatorname{ctg}20°$. **754.** $\operatorname{ctg}1$. **755.** $\operatorname{ctg}40°$.

756. $-\operatorname{tg}0{,}05\pi$. **757.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **758.** 1. **768.** $180°k$ и $45°(4k+1)$.

769. $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **770.** $180°k$. **771.** $\sin5°+\sin25°$.

772. $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{40}+\sin\frac{13\pi}{40}\right)$. **773.** $\frac{1}{2}(\sin2x-\sin2y)$.

774. $\sin5-\sin1$. **775.** $\frac{1}{2}(\cos10°+\cos20°)$. **776.** $\cos2a+\cos2b$.

777. $\frac{1}{2}[\cos1+\cos(2x+1)]$. **778.** $\frac{1}{2}[\cos(x-1)+\cos(2x+3)]$.

779. $\frac{1}{2}(\cos22°-\sin2°)$. **780.** $\cos A-\cos3A$.

781. $\cos2n-\cos2m$. **782.** $\frac{1}{4}(\sin24°+\sin12°+\sin8°-\sin4°)$.

783. $\cos5°-\cos15°+\cos35°-\cos45°$.
784. $\sin14°+\sin18°+\sin10°-\sin42°$.
785. $\cos5°+\cos25°+\cos45°+\cos75°$.
786. $\cos1°+\cos3°+\cos5°+\cos7°+\cos9°+\cos11°+\cos13°+\cos15°$.
787. $1-\cos6A-\cos8A+\cos10A$.
788. $-\cos1+\cos3-\cos5+\cos7+\cos9-\cos11+\cos13-\cos15$.
789. 0,1983. **790.** 0,3714. **791.** 0,2028.

792. 1) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{1}{4}$.

793. 1) $\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin3\alpha$; 2) $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{8}\cos4\alpha$;

3) $\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos2\alpha-\frac{1}{16}\cos4\alpha-\frac{1}{32}\cos6\alpha$.

794. 1) $2\sin25°\cdot\cos1°$; 2) $2\sin a\cdot\cos4a$; 3) $\cos x$; 4) $\sin y$.
795. 1) $2\cos10°\cdot\cos33°$; 2) $2\sin2\cdot\sin3$; 3) $\cos\beta$; 4) $\sin\alpha$.

796. 1) $\sqrt{3}\operatorname{tg}5$; 2) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha$.

797. 1) $2\sin39°\cdot\cos22°$; 2) $\sqrt{2}\sin5°$;

3) $2\cos\left(45°+\frac{a-b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}-45°\right)$;

4) $2\sin\left(45°-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(45°-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$; 5) $\sqrt{2}\cdot\cos(x-45°)$.

798. 1) $4\sin 25^\circ\cdot\cos 27^\circ\cdot\cos 33^\circ$;

2) $4\cos 2a\cdot\cos\left(\frac{3a}{2}+30^\circ\right)\cdot\cos\left(\frac{3a}{2}-30^\circ\right)$.

799. $4\sin 5^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 14^\circ$. **800.** 1) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$;
2) $\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)$; 3) $-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$.
801. 1) $\sin(y+x)\cdot\sin(y-x)$; 2) $-\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)$.

802. 1) $\frac{\sin 32^\circ}{\cos 15^\circ\cdot\cos 17^\circ}$; 2) $\frac{\cos 39^\circ}{\cos 11^\circ\cdot\sin 28^\circ}$; 3) $2\operatorname{tg}(2\alpha-6^\circ)$; 4) $2\sec 2\alpha$.

803. 1) $\frac{\cos 29^\circ}{\sin 7^\circ\cdot\cos 29^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{tg} 41^\circ}{\sin 8^\circ}$; 3) $2\operatorname{cosec} 2(A+B)$.

804. 1) $2\operatorname{cosec} 10^\circ$; 2) $\frac{\sin 10^\circ}{\cos 15^\circ\cdot\cos 25^\circ}$; 3) $-2\operatorname{tg} 2\alpha$.

805. 1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$; 2) $\frac{\sin(a+b)\cdot\sin(b-a)}{\sin^2 a\cdot\sin^2 b}$;

3) $-\frac{\cos(15^\circ+x)\cdot\cos(15^\circ-x)}{\cos^2 15^\circ\cdot\sin^2 x}$; 4) $\frac{\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)}{\sin^2 x\cdot\cos^2 y}$.

806. 3) $2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 5) $\cos 2\alpha$; 6) $-\cos 2\alpha$.

807. 1) $\frac{\sin(45^\circ\pm\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin(\alpha\pm 45^\circ)}{\sin 45^\circ\cdot\sin\alpha}$.

808. 1) $2\operatorname{tg} x\cdot\cos^2\frac{x}{2}$; 2) $2\operatorname{ctg} x\cdot\cos^2\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)$;

3) $-2\operatorname{tg} x\cdot\sin^2\frac{x}{2}$; 4) $2\operatorname{ctg} x\cdot\sin^2\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)$.

809. 1) $2\sec\alpha\cdot\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $2\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

3) $-2\sec\alpha\cdot\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\operatorname{cosec}\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

810. 1) $4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $4\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$;

3) $4\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2\sin(x-30^\circ)}{\cos x}$.

811. 1) $4\sin(30^\circ+a)\cdot\sin(30^\circ-a)$; 2) $4\sin(30^\circ+a)\cdot\sin(30^\circ-a)$;
3) $\sin(b+60^\circ)\cdot\sin(b-60^\circ)$; 4) $2\sqrt{2}\sin\frac{45^\circ+b}{2}\cdot\sin\frac{45^\circ-b}{2}$.

812. 1) $\frac{4\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)}{\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{4\sin(\alpha+60^\circ)\cdot\sin(\alpha-60^\circ)}{\sin^2\alpha}$.

813. 1) $2\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

814. $\sin(\alpha\pm\beta)\cdot\cos(\alpha\mp\beta)$. **815.** $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

816. $2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)$. **817.** $-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha$.

818. $4\cos\alpha\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$. **819.** $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

820. $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}$.

847. *Указание.* Воспользоваться тождеством: $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha$.

848. *Указание.* Умножить и разделить левую часть на $\sin 10°$.

849. Решение. $16\sin 20°\cdot\sin 40°\cdot\sin 60°\cdot\sin 80°=8\cdot(\cos 20°-\cos 60°)\times$

$$\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 80°=4\sqrt{3}\left(\cos 20°\cdot\sin 80°-\frac{1}{2}\cdot\sin 80°\right)=$$

$$=2\sqrt{3}\,(\sin 60°+\sin 100°-\sin 80°)=$$

$$=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 80°-\sin 80°\right)=3.$$

853. Решение. Умножим числитель и знаменатель на $2\sin\alpha$:

$$\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha+\ldots+2\sin\alpha\cdot\sin(2n-1)\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos 3\alpha+\ldots+2\sin\alpha\cdot\cos(2n-1)\alpha}=$$

$$=\frac{(1-\cos 2\alpha)+(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)+\ldots+[\cos(2n-2)\alpha-\cos 2n\alpha]}{\sin 2\alpha+(\sin 4\alpha-\sin 2\alpha)+\ldots+[\sin 2n\alpha-\sin(2n-2)\alpha]}=$$

$$=\frac{1-\cos 2n\alpha}{\sin 2n\alpha}=\frac{2\sin^2 n\alpha}{2\sin n\alpha\cdot\cos n\alpha}=\operatorname{tg} n\alpha.$$

854. *Указание.* Умножить и разделить левую часть на $2\sin\frac{\alpha}{2}$.

856. *Указание.* Преобразовать левую часть, заменив в ней сначала $\sin C$ на $\sin(A+B)$, а затем $\sin\frac{A+B}{2}$ на $\cos\frac{C}{2}$.

857. *Указание.* Поступить так же, как и в задаче 856.

858. *Указание.* Воспользоваться соотношением: $\operatorname{tg}C=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B-1}$.

859. *Указание.* Умножить обе части тождества $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\times$ $\times\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$ (задача 858) на $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$.

860. *Указание.* Воспользоваться соотношением:

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-1}.$$

865. $45°$. **866.** Решение. Заменив $\cos C$ на $-\cos(A+B)$, получим:

$$\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}-\cos^2 C=\frac{1}{4}$$

или $\sin^2 C=\frac{1}{4}$. Отсюда получаем: $\sin C=\frac{1}{2}$ (синусы углов треугольника положительны), $C=30°$ или $C=150°$. **867.** $2\operatorname{cosec}2\gamma$.

868. $2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma$. **869.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

870. $a^2\sin^2\varphi$, где $\cos\varphi=\frac{b}{a}$.

871. $a^2\sec^2\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

872. $2\sqrt{a}\cdot\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$, где $\cos\varphi=\frac{b}{a}$.

873. $2\operatorname{cosec}\varphi$, где $\cos\varphi=\frac{b}{a}$.

874. $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, где $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

875. $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\omega x+\varphi)$, где $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

876. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. **877.** $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

878. $5\sin(x-36^\circ52')$. **879.** $5\sin 73^\circ8'$.

880. $3\sin(x-48^\circ12')$. **881.** $13\sin(3x+22^\circ36')$.

882. $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. **883.** $17\sin(73^\circ3'+A)$.

884. $b\cos\alpha\cdot\sec\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha$.

885. $\operatorname{tg}(\varphi-45^\circ)$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{c}{b\sin\alpha}$.

886. 1) $\sqrt{2}$, при $x=45^\circ$; 2) $\sqrt{2}$, при $x=135^\circ$; 3) $\frac{1}{2}$, при $x=45^\circ$.

887. 1) $y_{наиб.}=\frac{3}{4}$; $y_{наим.}=\frac{1}{4}$; 2) Решение. Представив функцию в виде $y=\frac{1}{2}\sin(b_1-b_2)+\frac{1}{2}\sin(2ax+b_1+b_2)$, найдём:

$$y_{наиб.}=\frac{1}{2}[1+\sin(b_1-b_2)]=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b_1-b_2}{2}\right);$$

$$y_{наим.}=\frac{1}{2}[\sin(b_1-b_2)-1]=-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b_1-b_2}{2}\right).$$

888. 1) $y_{наиб.}=0$; $y_{наим.}=-1$; 2) $y_{наиб.}=\cos^2\frac{2b_1-b_2}{2}$;

$y_{наим.}=-\sin^2\frac{b_1-b_2}{2}$.

889. $y_{наиб.}=\cos^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$; $y_{наим.}=-\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$.

890. 1) $y_{наиб.}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; $y_{наим}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$;

2) $y_{наиб.}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; $y_{наим.}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

891. $y_{наиб.}=\sqrt{a^2+b^2}$; $y_{наим}=-\sqrt{a^2+b^2}$.

892. $y_{наиб.}=6$; $y_{наим.}=1$. **893.** 2.

895. $c\sqrt{2}$ (у равнобедренного прямоугольного треугольника).

896. h^2 (у равнобедренного прямоугольного треугольника).

897. $\frac{\pi}{3}(2k+1)$. **898.** $\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **899.** $\frac{\pi}{3}(3k+1)$. **900.** $\frac{\pi k}{2}$.

901. $\frac{\pi k}{8}$. **902.** $\frac{\pi}{8}(2k+1)$ и πk. **903.** $\frac{\pi}{8}(4k-1)$. **904.** $\frac{\pi k}{4}$.

905. $\frac{\pi}{8}(2k+1)$ и $\frac{\pi k}{2}$. **906.** $\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

ГЛАВА IV

907. 4) $\bar{1},9801$; 6) $\bar{1},8864$; 7) $\bar{1},8531$; 10) $\bar{1},2953$; 11) $\bar{1},1991$; 14) $\bar{2},0435$.

908. 2) $\bar{1},3927$; 5) $\bar{1},6631$; 8) $\bar{1},0033$. **909.** 3) $\bar{1},7707$; 5) $\bar{1},9435$; 7) $\bar{1},0068$; 8) 0. **910.** 2) 0,1480; 4) $\bar{1},4037$; 6) $\bar{1},00,55$; 8) 0. **911.** 4) 71°48′; 6) 15°50′; 8) 69°03′. 10) 11°37′; 12) 5°46′; 14) 0°25′. **912.** 2) 40°12′; 5) 40°26′; 7) 75°38′; 10) 76°05′. **913.** 4) 29°28′; 7) 3°43′; 8) 84°18′. **914.** 4) 75°51′; 9) 0°16′. **915.** 54°39′. **916.** 52°54′. **917.** 81°04′. **918.** 4°20′. **919.** 82°06′. **920.** 11,01. **921.** 0,043. **922.** 41 700. **923.** 440,2. **924.** 61,94.

925. $R = \frac{r}{\sin^2\alpha}\sqrt{\cos 2\alpha} = 49{,}25$.

926. 1,918. **927.** 3081. **928.** 0,0054. **929.** 224,8. **930.** 352,8. **931.** 9,5. **932.** 20,68.

933. 32,67. **934.** 23,28. **935.** $S = \frac{H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}} = 74{,}59$. **936.** 5597. **937.** 29,82.

938. 290,5. **939.** 1892. **940.** 1286. **941.** 117,9. **942.** 8,245. **943.** 1) $\frac{1}{2}b^2\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha$.

	a	b	c	A	B	S
944.	(30,01 *м*)	5,075 *м*	30,43 *м*	(80°24′)	9°36′	76,14 *м*²
945.	(9,084 *м*)	6,380 *м*	11,10 *м*	54°55′	(35°05′)	29,98 *м*²
946.	9,30 *см*	(72,3 *см*)	72,88 *см*	(7°20′)	82°40′	336,3 *см*²
947.	150,2 *дм*	(91,14 *дм*)	175,7 *дм*	58°45′	(31°15′)	6844 *дм*²
948.	0,204 *м*	0,127 *м*	(0,24 *м*)	(58°)	32°	0,0129 *м*²
949.	5,322 *дм*	9,283 *дм*	(10,7 *дм*)	(29°50′)	60°10′	24,71 *дм*²
950.	396,7 *см*	363,5 *см*	(538 *см*)	47°30′	(42°30′)	72 090 *см*²
951.	63,04 *м*	49,82 *м*	(80,35 *м*)	51°41′	(38°19′)	1570 *м*²
952.	(1,8 *дм*)	1,88 *дм*	(2,6 *дм*)	43°50′	46°10′	1,689 *дм*²
953.	(90,6 *м*)	95,17 *м*	(131,4 *м*)	43°35′	46°25′	4311 *м*²
954.	7,8 *см*	(4,5 *см*)	(9,0 *см*)	60°	30°	17,6 *см*²
955.	0,784 *м*	(0,295 *м*)	(0,838 *м*)	69°23′	20°37′	0,1157 *м*²

	a	b	c	A	B	S
956.	(60,3 *см*)	(48,7 *см*)	77,52 *см*	51°04′	38°56′	1469 *см*²
957.	(18,04 *м*)	(20,22 *м*)	27,10 *м*	41°44′	48°16′	182,4 *м*²
958.	(95,5 *см*)	(1,08 *м*)	1,44 *м*	41°29′	48°31′	5157 *см*²
959.	(9,24 *дм*)	(8,42 *дм*)	12,50 *дм*	47°40′	42°20′	38,90 *дм*²

	a	c	b	A	C	B	S
960.	(32 *см*)	32 *см*	54,3 *см*	(32°)	32°	116°	460,1 $см^2$
961.	(30,5 *см*)	30,5 *см*	46,3 *см*	40°35′	40°35′	(98°50′)	459,6 $см^2$
962.	4,47 *м*	4,47 *м*	(6,1 *м*)	(47°)	47°	86°	9,974 $м^2$
963.	80,3 *м*	(80,3 *м*)	(72,9 *м*)	63°00′	63°00′	54°00′	2608 $м^2$
964.	8 *см*	(8 *см*)	6,9 *см*	64°18′	64°18′	51°24′	(25 $см^2$)
965.	10,23 *см*	10,23 *см*	11,41 *см*	56°08′	56°08′	(67°44′)	(48,5 $см^2$)

966. $B = 57°40'$; $b = 0{,}4062$; $a = 0{,}2571$; $c = 0{,}4808$; $S = 0{,}0522$. **967.** $B = 48°22'$; $c = 51{,}24$; $a = 34{,}04$; $b = 38{,}30$. **968.** $A = 63°46'$; $c = 27{,}51$; $a = 24{,}67$; $b = 12{,}15$; $S = 150{,}0$.

ГЛАВА V

969. $2R \sin \frac{180°}{n}$. **970.** $k_n = R \cos \frac{180°}{n}$.

971. $p_n = 2nR \sin \frac{180°}{n}$; $P_n = 2nR \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$.

972. 1) $s_n = \frac{1}{2} nR^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$; 2) $S_n = nR^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.

973. $\frac{p^2}{4n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. **974.** $\frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$. **975.** $\cos^2 \frac{\pi}{n}$. **976.** $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \sqrt{\frac{q \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{2n}}$.

977. $\frac{a^2}{2\sin^2 (45° + \alpha)}$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$. Наибольшее значение, равное a^2, достигается при $\alpha = 0°$ и $\alpha = 90°$; наименьшее значение $(0{,}5a^2)$ — при $\alpha = 45°$.

978. $\frac{\pi a}{\sin \alpha}$. **979.** $\frac{C}{\pi} \sin \alpha$; $\frac{C}{\pi} \sin \beta$; $\frac{C}{\pi} \sin (\alpha + \beta)$. **980.** $\frac{\pi h}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$.

981. $2\pi d \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$; $2\pi d \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

982. $\frac{C^2}{\pi^2 \sin \alpha}$; $\alpha = 39°33'$.

983. $2\pi \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$. Наименьшее значение, равное $2\pi\sqrt{S}$, длина окружности принимает при $\alpha = 45°$.

984. $\operatorname{tg} \frac{x}{4} = \frac{2h}{b}$. При $h = b$, $x = 253°44'$.

985. $\frac{\pi R \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)}$; $\alpha = 60°$. **986.** $\frac{C^2 \cos^2 \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\pi^2 \sin \alpha}$, $0° < \alpha \leqslant 90°$.

987. $\frac{\pi a^2}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$, $0 < \alpha < 2\pi$. Наименьшее значение, равное $\frac{\pi a^2}{4}$, достигается при $\alpha = \pi$.

988. $\frac{4q}{\pi \sin \alpha}$, $0 < \alpha < \pi$. Наименьшее значение, равное $\frac{4q}{\pi}$, достигается при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

989. $\sin \alpha = \frac{4q}{\pi Q}$. **990.** $\pi d^2 \cos^4\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$ и $\pi d^2 \sin^4\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$. При $\varphi = 0$ площади кругов равны и площадь каждого круга равна одной четвёртой части круга, построенного на d, как на диаметре.

991. $\frac{\pi Q \sin \alpha \cdot \sin \beta}{4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$.

992. $\frac{\pi R^2 \sin^2 \alpha}{4 \cos^4\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$. При $\alpha = 90°$ площадь вписанного круга достигает наибольшего значения, равного $0{,}25\,\pi R^2$. **993.** $\frac{R^2}{2}(\alpha - \sin \alpha)$.

994. $\frac{a}{\sin \alpha}$; $a \operatorname{ctg} \alpha$. **995.** $\operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{2\pi h}$. **996.** $\frac{b}{\sin \alpha}$.

997. $2b\sqrt{\sin(30° + \beta) \cdot \sin(30° - \beta)}$, $0° < \beta \leqslant 30°$.

998. 1) $a\sqrt{\cos \alpha}$; 2) $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

999. $\frac{a\sqrt{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}}{2 \cos \alpha \cdot \cos \beta}$. **1000.** $d\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $45° < \alpha < 90°$.

1001. $\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \alpha$; $30° < \alpha < 90°$. **1002.** $b \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$. **1003.** $\pi a^2 \cos^2 \alpha$.

1004. $2\pi l \cos \beta$. **1007.** $\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta$.

1008. $\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$; при $\alpha \to 0°$, $BD \to b$ (точка D сливается с C и BD с BC); при $\alpha \to 90°$, $BD \to a$ (наклонная становится перпендикуляром к P, а отрезок BD сливается с AB); при $\alpha < 90°$, $b < BD < a$; при $\alpha = 45°$, $BD = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2)}$. **1009.** $a \sin \alpha$.

1010. $\frac{a\sqrt{2}}{\sin \alpha}$. Наименьшее значение при $\alpha = 90°$ равно $a\sqrt{2}$.

1011. $\frac{2(c - b)}{a\sqrt{3}}$; $60°$.

1012. $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha$; $90°$. **1013.** $\sin \varphi = \sin \alpha \cdot \cos \beta$.

1014. $\sin \varphi = \sqrt{2} \sin \alpha$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$. Наибольшее значение угол φ достигает при $\alpha = 45°$ ($\varphi = 90°$), наименьшее — при $\alpha = 0°$ ($\varphi = 0$).

1015. $\cos \varphi = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $0° < \alpha \leqslant 60°$. **1016.** $\cos \varphi = \sqrt{-\cos \alpha}$, $90° < \alpha < 180°$.

1018. $\sin x_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{\gamma}{2}}$; $\sin x_2 = \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{\alpha}{2}}$; $\sin x_3 = \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{\beta}{2}}$.

1019. $\cos x = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{или } \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sec \frac{\alpha}{2}\right)$; 1) $90°$; 2) $\cos x = \frac{1}{3}$.

1020. $\sec\frac{x}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}$.

1021. 1) $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$ и т. д.;

2) $\sin y=\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$.

1022. $\frac{P}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **1023.** $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\varphi}$; 1) $\varphi=0$, $R=P+Q$;

2) $\varphi=180°$, $R=P-Q$; 3) $\varphi=90°$, $R=\sqrt{P^2+Q^2}$. **1024.** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{\pi D}$.

1025. 39° (приближённо). **1026.** $\sin\varphi=\frac{v_2}{v_1}$, где φ — угол, образованный продольной осью самолёта с направлением юг — север. **1027.** $v=gt\sin\varphi$.
1028. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v^2}{gR}$, где α — угол наклона дорожки трека, g — ускорение силы тяжести; 27° (приближённо).
1029. a — тангенс угла наклона прямой $y=ax+b$ к оси абсцисс.
1030. 1) $\varphi=\alpha_1-\alpha_2$; 2) $a_1=-\frac{1}{a_2}$.

1031. 2) T — период колебания, т. е. тот промежуток времени, в течение которого движущаяся точка совершает полное колебание; 3) $\frac{1}{T}$ — частота колебания, т. е. число полных колебаний в секунду.
1032. Период $\frac{2\pi}{\omega}$; частота $\frac{\omega}{2\pi}$. **1033.** 1) 4π; 2) амплитудами.

1034. 1) 2π; 3; 2) π; 3; 3) $\frac{\pi}{2}$; 3.

1036. 1) 1; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{3}{2\pi}$; 0; 2) 5; π; $\frac{1}{\pi}$; 0; 3) 4; 2; $\frac{1}{2}$; 0; 4) 2; 4π; $\frac{1}{4\pi}$; 0;

5) 2; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2\pi}$; 5; 6) $\frac{1}{3}$; 1; 1; -6π.

1037. 1) 5 и 0; 2) $2\sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{6}$; 3) 5 и 0,64 (приближённо); 4) $\sqrt{7}$ и —0,7 (приближённо).

ГЛАВА VI

1038. 1) Нет; 2) да, если $\sin x<0$.
1039. 1) I и III; 2) II и IV; 3) неравенство невозможно; 4) I и II; 5) I и IV.
1040. Нет. **1041.** 0.
1042. 1) $|\sin(\sin x)|\leqslant\sin 1$; 2) $|\sin(\cos x)|\leqslant\sin 1$; 3) $|\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)|<\infty$;
4) $0\leqslant\cos(\sin x)\leqslant\cos 1$; 5) $|\sec(\operatorname{tg} x)|\geqslant 1$; 6) $|\operatorname{tg}(\sec x)|\geqslant\operatorname{tg} 1$;
7) $|\sin x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}$; 8) $|\sin x\cdot\cos x|\leqslant\frac{1}{2}$.

1043. 1) $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}$;

3) $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$; 4) $0 \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi$;

5) $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$; 6) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$; 7) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$;

$\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{5\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$; 8) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$;

$\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{4\pi}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$; 9) $0 < x \leqslant \frac{\pi}{3}$ и

$\pi < x \leqslant \frac{4\pi}{3}$; 10) $\frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{5}{3}\pi$.

1044. Функция определена для всех действительных значений x, кроме чисел вида $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Наименьшее значение, равное $\frac{1}{2}$, эта функция принимает при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

1045. 1) Все действительные числа, кроме чисел вида $\pi(2k+1)$; 2) положительные числа и нуль.

1046. 1) Совокупность всех действительных чисел, за исключением чисел вида $x = \pi k$; 2) все действительные числа, за исключением нуля; 3) все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 4) все действительные числа; 5) все действительные числа.

1047. 1) $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; 3) $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;

4) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2\pi$; 5) $0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$ и

$\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi$; 6) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{5\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$.

1048. 1) $x \neq \pi k$; 2) отрезки $2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}(4k+1)$.

1049. 1) $2\pi k < x < \pi(2k+1)$; 2) все действительные числа вида $x = 2\pi k$; 3) все действительные числа вида $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, если $a > 1$ и промежутки $2\pi k < x < (2k+1)\pi$, если $0 < a < 1$.

1050. 1) Все действительные числа, за исключением чисел вида πk; 2) все действительные числа, за исключением чисел вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 3) все действительные числа, за исключением чисел вида $\frac{\pi}{2}k$. При всех допустимых значениях аргумента каждая из данных функций равна 1.

1051. Область определения функции — все действительные числа, за исключением чисел вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; для всех допустимых значений x функция положительна; значений, превосходящих 1, функция принимать не может.

1052. 1) 1; 2) 8π; 3) π; 4) 12π; 5) 2π.

1054. Чётные функции: 1), 2) и 6); нечётные функции: 3) и 4); ни чётная, ни нечётная функция: 5). **1055.** 1) Да; 2) нет; 3) да.

1056. При возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $y = \lg \sin x$ возрастает от $-\infty$ до 0, а функция $y = \lg \cos x$ убывает от 0 до $-\infty$.

1057. 1) При возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $y=\sin^2 x$ возрастает от 0 до 1; при возрастании x от $\frac{\pi}{2}$ до π y убывает от 1 до 0; при возрастании x от π до $\frac{3}{2}\pi$ возрастает от 0 до 1; в дальнейшем y убывает от 1 до 0.

2) При возрастании x от 0 до π функция $y=1-\cos x$ возрастает от 0 до 2; при возрастании x от π до 2π y убывает от 2 до 0. Наибольшее значение, равное 2, функция $1-\cos x$ принимает при $x=\pi$, наименьшее, равное 0, при $x=0$ и 2π.

1058. 1) Наибольшее значение, равное 2, функция $1+\sin x$ принимает при $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; 2) наибольшее значение, равное 2, функция $1-\sin x$ принимает при $x=2\pi k+\frac{3}{2}\pi$; 3) не имеет; 4) наибольшее значение, равное 1, функция $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ принимает при $x=\pi k$.

1059. 4. **1060.** Наибольшее значение функции равно 2, наименьшее значение равно 1. **1061.** 1) Наибольшее значение функция $\sin(\cos x)$ принимает при $x=2\pi k$, наименьшее — при $x=\pi(2k+1)$; 2) при $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$ функция $\operatorname{tg}(\sin x)$ принимает наибольшее значение, а при $x=\frac{3}{4}\pi+\pi k$ — наименьшее значение. **1062.** $y_{наиб.}=8$; $y_{наим.}=-9$.

1068. 0. **1069.** -1. **1070.** $|\sin A|$.

1071. $-a^2$, $|a|\leqslant 1$. **1072.** $-\sqrt{-a}$, $-1\leqslant a\leqslant 0$.

1073. $|a|$, $|a|\geqslant 1$. **1074.** $1+\sin^2\alpha$. **1075.** $\cos^2\alpha$. **1076.** $2\operatorname{cosec}\alpha$.

1083. $\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{A^2-1}{B^2-1}}$; $\sin\beta=\pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{B^2-A^2}{B^2-1}}$.

1084. $2(2-\sqrt{3})$. **1085.** $\sin^2(A+B)$.

1086. $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. **1087.** $-\sin 1\cdot\cos 1$ [$\approx -0{,}454$].

1088. $\sin^2\alpha$. **1089.** $\frac{1}{8}$. **1094.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1095. $\pm\frac{17\sqrt{2}}{26}$. **1096.** $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1-\sin\alpha}-\sqrt{1+\sin\alpha})$;

$\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}(\sqrt{1-\sin\alpha}+\sqrt{1+\sin\alpha})$. **1097.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

1108. $\cos 7°$. **1109.** $2\cos^2\alpha$. **1110.** $2\operatorname{ctg}\alpha$. **1111.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$. **1112.** $\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

1113. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{4}+30°\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{4}-30°\right)$.

1114. $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(45°+\alpha)}{\cos\alpha}$. **1115.** $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(45°-\alpha)}{\cos\alpha}$.

1116. $2\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$. **1117.** $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$.

1118. $4\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$. **1119.** $\frac{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\sin 4\alpha}$. **1120.** $\operatorname{ctg}\alpha$.

1121. $A=\frac{\pi}{2}$.

1122. Решение. Докажем, что $\operatorname{tg}^2 20^\circ$ является корнем данного уравнения. Для этого достаточно показать, что

$$(\operatorname{tg}^2 20^\circ)^3-33(\operatorname{tg}^2 20^\circ)^2+27\operatorname{tg}^2 20^\circ-3=0.$$

Имеем:

$$3=\operatorname{tg}^2(3\cdot 20^\circ);$$

$$3=\left(\frac{3\operatorname{tg}20^\circ-\operatorname{tg}^3 20^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 20^\circ}\right)^2;$$

$$3=\frac{9\operatorname{tg}^2 20^\circ-6\operatorname{tg}^4 20^\circ+\operatorname{tg}^6 20^\circ}{1-6\operatorname{tg}^2 20^\circ+9\operatorname{tg}^4 20^\circ};$$

$$\operatorname{tg}^6 20^\circ-33\operatorname{tg}^4 20^\circ+27\operatorname{tg}^2 20^\circ-3=0.$$

Аналогично поступаем и в отношении $\operatorname{tg}^2 40^\circ$ и $\operatorname{tg}^2 80^\circ$; исходя из равенств:

$$3=\operatorname{tg}^2(3\cdot 40^\circ) \text{ и } 3=\operatorname{tg}^2(3\cdot 80^\circ).$$

1124. 124,1. **1125.** 957,2. **1126.** 3,468. **1127.** 217,3. **1128.** 373 300. **1129.** 0,5962. **1130.** 11,53. **1131.** 0,1089. **1132.** 4,495. **1133.** 2687. **1134.** 4868. **1135.** 243,0. **1136.** 0,0108. **1137.** 8162. **1138.** 1,101. **1139.** 3889. **1140.** $1989\cdot 10^5$. **1141.** 42,07. **1142.** 179,9. **1143.** $2556\cdot 10^6$. **1144.** 2,011. **1145.** 1076. **1146.** 0,4106. **1147.** 6074. **1148.** $1831\cdot 10^5$. **1149.** 190,2. **1150.** 7,155. **1151.** 5,087. **1152.** 642,5. **1153.** 1,479. **1154.** 1042. **1155.** 1,563. **1156.** 0,05595. **1157.** 0,006569.

ГЛАВА VII

1159. Да (кроме синуса и косеканса), если $A+B>90^\circ$.
1160. $A=52^\circ 30'$; $B=7^\circ 30'$; $C=120^\circ$. **1161.** $A=B=C=60^\circ$.

1169. $\frac{a}{2\sin\alpha}$. **1170.** $48^\circ 10'$ и $131^\circ 50'$. **1171.** 1,22 *м*.

1172. $\frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **1173.** 20,62 и 14,73. **1174.** 61,87 и $37^\circ 48'$.

1175. $\frac{c\sin 2\beta}{2\sin(45^\circ+\beta)}$. **1178.** $2R^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

1179. $2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$. **1180.** $12{,}5\pi$ *см*^{2}. **1181.** $\frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

1182. $h+\frac{b\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$. **1183.** $\frac{h\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **1184.** $\frac{h\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$. **1191.** 90°.

1192. 4,9. **1193.** 75,5 *м*. **1194.** 4,0 *м*; 8,1 *м*.

1195. $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\varphi}$; 1) $R=P+Q$; 2) $R=\sqrt{P^2+Q^2}$; 3) $R=P-Q$.
1200. $79^\circ 45'$ и $38^\circ 05'$. **1201.** $B=105^\circ$ и $C=15^\circ$. **1202.** 38,8 *кГ* и $63^\circ 10'$.
1203. 125 *м*. **1204.** 17,5 *м*.

№	a	b	c	A	B	C	S
1205.	(98,55)	180,4	231,9	(23°42′)	(47°24′)	108°54′	8410
1206.	(48,8)	62,5	27,8	48°40′	(106°)	(25°20′)	652,1
1207.	517,5	(650,8)	232,3	(46°04′)	115°04′	(18°52′)	54 440
1208.	0,176	(0,307)	0,318	(32°40′)	(70°20′)	77°0′	0,0263
1209.	21,05	29,77	(28,32)	(42°24′)	(72°29′)	65°07′	284,3
1210.	(71,05)	111,5	63,19	36°06′	(112°18′)	(31°36′)	2077
1211.	(93)	(65)	62	93°47′	44°13′	(42°)	2022
1212.	5,58	(4,42)	(5,72)	(65°20′)	46°01′	68°39′	11,49
1213.	(50,8)	24,8	(32,3)	125°10′	(23°30′)	31°20′	327
1214.	(20,73)	(36,26)	35,35	33°37	75°38′	(70°45′)	354,8
1215.	0,864	(0,224)	(0,718)	(124°)	12°25′	43°35′	0,0667
1216.	(87,38)	(62,24)	100,7	59°25′	37°49′	(82°46′)	2699
1217.	(62)	(48)	80,78	(50°)	36°22′	93°38′	1485
1218.	(32)	(48)	68	25°20′	(40°)	114°40′	698
1219.	(17,8)	(18,3)	0,74	46°20′	(132°)	1°40′	4,88
1220.	0,49 0,20	(0,34)	(0,46)	73° 23°	(42°)	65° 115°	0,075 0,030
1221.	—	(12,7)	(28,3)	—	(70°30′)	—	—
1222.	(99,2)	137 37,8	(68,5)	43°30′ 136°30′	108°10′ 15°10′	(28°20′)	3230 889
1223.	(1,45)	—	(2,11)	(63°50′)	—	—	—
1224.	267 123	(256)	(314)	54°50′ 22°10′	(51°30′)	73°40′ 106°20′	32 860 15 170
1225.	24,13	(83,42)	(67,32)	13°46′	(124°38′)	41°36′	668,2
1226.	(0,516)	(0,808)	1,18	21°24′	(34°50′)	123°46′	0,173
1227.	(21,75)	23,59 11,62	(27,34)	(49°54′)	56°04′ 24°08′	74°02′ 105°58′	246,7 121,6
1228.	(457,1)	(169,9)	424,4	90°	(21°49′)	68°11′	36 060
1229.	(28)	(35)	(42)	41°	56°	83°	487
1230.	(0,18)	(0,23)	(0,09)	46°	113°	21°	0,0075
1231.	(3,9)	(4,1)	(2,8)	66°	73°	41°	5,2
1232.	(0,615)	(0,487)	(0,804)	49°50′	37°10′	93°00′	0,150
1233.	(421,6)	(409,8)	(335,9)	68°02′	64°20′	47°38′	63 800
1234.	(1,236)	(2,346)	(3,456)	10°57′	21°09′	147°54′	0,7705
1235.	15,4	18,4	16,6	(52°)	(70°)	58°	121
1236.	11,3	9,7	14,5	(64°)	(50°)	66°	50,1
1237.	2,32	1,47	1,33	(112°)	(36°)	32°	0,904
1238.	121	72	157	(48°)	(26°)	106°	4178
1239.	37,6	25,4	36,7	(72°)	(40°)	68°	444

1240. 91°15′ и 36°15′; 23,0 и 13,5. **1241.** 85°20′ и 56°10′; 34,1 и 28,4.
1242. 41°05′; 36°17′; $a = 8{,}56$; $b = 5{,}76$. **1243.** 78°03′ и 37°37′; 18,9 и 20,5.

№	a	b	c	A	B	C	S
1244.	(20,12)	(48,42)	49,64 39,08	23°38′	74°48′ 105°12′	81°34′ 51°10′	481,7 379,4
1245.	16,78	31,25	38,86	(24°47′)	(51°20′)	103°53′	254,6
1246.	(42,50)	166,3	138,6	12°08′	(124°38′)	43°14′	(2423)
1247.	(6)	(8)	4 13,5	47° 13°	103° 17°	30° 150°	(12)
1248.	10,0	4,8	6,9	115°40′	25°40′	38°40′	(15)
1249.	(32)	(25)	16	100°	50°	30°	196

1250. 512 *км*. **1251.** 53°50′ и 43°00′. **1252.** 780,3 *кГ*, 26°37 и 23°23′.
1253. 5 миль. **1254.** 16,8 *м*. **1255.** 143,2. **1256.** 29°20′. **1257.** 71 *м*.
1258. 6,22 *м*. **1259.** 43,91 *м*. **1260.** 765,4 *м*.

1261. $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\gamma - \alpha)}$, где $AC = \dfrac{b \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}$ и

$BC = \dfrac{b \sin\delta}{\sin(\alpha + \delta)}$. **1262.** 9,63 *км*.

1263. 1) Из $\triangle AOB$: $AB = 2R \sin\dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$.

2) Из $\triangle AO_1B$: $AO_1 = \dfrac{AB \sin ABO_1}{\sin AO_1B}$.

3) Из $\triangle AOO_1$: $OO_1 = \sqrt{R^2 + AO_1^2 - 2R \cdot AO_1 \cdot \cos OAO_1}$.

ГЛАВА VIII

1271. Понятия множества и соответствия.

1274. 1) $x \geqslant 0$; 2) $x \leqslant 0$; 3) $x \neq \pm 1$; 4) $x > 0$; 5) $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$. $k = 0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$; 6) $x \neq \pi k$.

1276. 1) Да; 2) нет. **1277.** Да. **1278.** Нет. Функция $\sin x$ возрастает от -1 до 1 только на отрезках $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$.

1279. 1) Да; 2) да; 3) нет.

1288. 1) $x = \operatorname{Arc}\sin\dfrac{1}{3}$; 2) $x = \operatorname{Arc}\cos 0{,}3$;

3) $x = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-2)$; 4) $x = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} 1{,}5$;

5) $x = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin\left(-\dfrac{2}{5}\right)$; 6) $x = 3\operatorname{Arc}\cos 0{,}8$;

7) $x = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\pi - \dfrac{\pi}{3}$; 8) $x = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}$.

1289. 1) $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$; 2) $|x| \leqslant 3$; 3) множество всех действительных чисел;

4) $0 \leqslant x \leqslant 2$; 5) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 6) $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

1290. 1) $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{5\pi}{6}$; 2) $\dfrac{\pi}{3}$; 3) $\dfrac{3\pi}{4}$; 4) $\dfrac{\pi}{6}$; 5) $\dfrac{3\pi}{4}$; 6) 2,90 (приближённо).

1291. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{6}$ и $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$;

5) $-\frac{\pi}{4}$; 6) $-\frac{\pi}{3}$; 7) 1,17 (приближённо).

1292. 1) 0 и π; 2) $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$; 3) 0,68 и 3,82 (приближённо); 4) 1,94 и 5,08 (приближённо); 5) 4,03 и 5,39 (приближённо); 6) 0,40 и 5,88 (приближённо).

1293. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 3) $-\frac{\pi}{6}+\pi k$; 4) $\frac{\pi}{3}+\pi k$;

5) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; 6) $\pm 2{,}77+2\pi k$; 7) $0{,}86+\pi k$.

1295. $y=\operatorname{Arc}\sin 2x$, $|x|\leqslant\frac{1}{2}$.

1296. $y=\operatorname{Arc}\cos\frac{x}{2}$, $|x|\leqslant 2$.

1299. Для $\operatorname{Arc}\sin x$ и $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$. Для $\operatorname{Arc}\cos x$ и $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$.

1301. Потому что $\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ не существует.

1302. 1) $-\pi\leqslant 2\arcsin x\leqslant\pi$; 2) $0\leqslant 2\arccos x\leqslant 2\pi$.

1303. 1) $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$; 2) $0\leqslant x\leqslant 2$; 3) x — любое действительное число;

4) $x\neq 0$; 5) $-2\leqslant x\leqslant 0$; 6) $x\leqslant -1$; $x\geqslant 1$. *Указание.* Должно быть $-1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 1$; 7) $0\leqslant x\leqslant 1$; 8) $x\geqslant 0$; 9) $x\leqslant 1$; $x\geqslant 3$;

10) $0{,}1\leqslant x\leqslant 10$; 11) $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

1304. 1) x — любое действительное число; 2) $-\sin 1\leqslant x\leqslant\sin 1$; 3) x — любое действительное число; 4) x — любое действительное число; 5) x — любое действительное число; 6) $0\leqslant x\leqslant 1$; 7) $x\neq 0$; 8) $x\neq -1$; 9) x — любое действительное число; 10) $-1\leqslant x\leqslant 1$.

1305. 1) $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $-1\leqslant x\leqslant 1$; 3) при любых действительных значениях x.

1306. Нет. **1307.** 1) $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\frac{\pi}{2}=1$; 3) $\cos 120^\circ=-0{,}5$;

4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$; 5) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1308. 1) $\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$; 2) $-45^\circ=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $-\frac{\pi}{2}=\arcsin(-1)$;

4) $\frac{\pi}{4}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $90^\circ=\arccos 0$; 6) $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc}\operatorname{tg} 1$;

7) $150^\circ=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-\sqrt{3})$.

1309. 1) $x=2\sin y$; 2) $x=3\operatorname{tg}\frac{y}{2}$; 3) $x=\frac{1}{3}\cos\frac{y}{5}$; 4) $x=2\cos\frac{y-1}{3}$;

5) $x=2\operatorname{tg}\frac{2}{3}y$. **1310.** 1) $x=\frac{1}{3}\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$; 2) $x=\frac{1}{3}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{4}y$;

3) $x=5\arccos 10y$; 4) $x=\arcsin\frac{1}{2}y-1$; 5) $x=2-\arccos\frac{1}{2}y$;

6) $x=2\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(y-1)$. **1311.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$. **1312.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$;

3) π; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{3\pi}{4}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$. **1314.** 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{4}$;

4) $\frac{5\pi}{6}$; 5) 0; 6) π.

1316. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$; 7) 0; 8) $\frac{\pi}{4}$;

9) $-\frac{3\pi}{4}$; 10) $\frac{\pi}{2}$; 11) $\frac{\pi}{3}$; 12) $\frac{\pi}{9}$; 13) $\frac{3\pi}{4}$; 14) $\frac{4\pi}{3}$. **1317.** 1) $\frac{7\pi}{12}$;

2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{4\pi}{9}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 6) 0; 7) 0; 8) π. **1318.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 0.

1319. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1320.** 1) Не существует; 2) 1;

3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $-0,9659$. **1322.** 1) 20°; 0,3491; 2) 40°; 0,6981;

3) 50°; 0,8727; 4) 153°; 2,6704; 5) $-64°$; $-1,1170$; 6) 55°; 0,9599;
7) 122°42′; 2,1415; 8) 57°18′; 1,0001; 9) 105°; 1,8326.

1323. $\arcsin x > x$. **1324.** 1) 0; 2) $\frac{3+\pi}{6}$; 3) $\frac{2\sqrt{2}+\pi}{4}$; 4) $\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{6}$;

5) $\frac{2+\pi}{2}$.

1325. 1) 1,379; 2) 1,107; 3) 1,107; 4) 2,094; 5) 2,090; 6) 2,035.

1327. 1) $\arcsin\frac{a}{c}$ и $90° - \arcsin\frac{a}{c}$; 2) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{4S}{c^2}$ и $90° - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4S}{c^2}$.

1328. 1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 3) x — любое действительное число;
4) x — любое действительное число. **1333.** 1) 0,3; 2) 1,2;
3) $\frac{2}{5}$; 4) -2.

1334. 1) 0,8; 2) 5; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{45}{53}$; 5) $\frac{20}{29}$; 6) $\frac{20}{101}$; 7) $-\frac{20}{99}$;

8) $-4\frac{4}{9}$; 9) $-\frac{20}{99}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. **1335.** 1. **1336.** 1. **1337.** $\frac{352}{377}$.

1338. $-\frac{33}{56}$. **1339.** 0,14 (приближённо). **1340.** $-0,96$ (приближённо).

1341. 0,39 (приближённо). **1342.** $-\frac{1}{9}$. **1343.** $-7,94$ (приближённо).

1344. $0,4\sqrt{5}$. **1345.** 0,8. **1346.** 0,41 (приближённо). **1347.** $\sqrt{1-m^2}$.

1348. $\frac{1}{2}a$. **1349.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **1350.** $-3\frac{3}{7}$. **1351.** Не существует. **1352.** $\sqrt{3}$.

1372. 1) $\operatorname{arc\,ctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

3) $\arccos x = \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| \leqslant 1$;

4) $\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$

1379. 1) $\frac{21}{29}$; 2) $\frac{45}{53}$; 3) $\frac{20}{99}$; 4) $5\frac{5}{11}$. **1380.** 1) $\frac{31}{481}$; $15\frac{15}{31}$;

2) $\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$; $\frac{1}{m}$. **1381.** $\arcsin\frac{56}{65}$. **1382.** $\frac{\pi}{4}$. **1383.** $\frac{3\pi}{4}$. **1384.** $\frac{\pi}{2}$.

1402. 1) $\arcsin\frac{120}{169}$; 2) $\pi-\arcsin\frac{240}{289}$; 3) $\arcsin 0{,}96-\pi$; 4) $\arccos\frac{1}{8}$;

5) $\pi+\arccos\frac{1}{9}$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; 7) $-\operatorname{arctg} 2{,}4$; 8) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi$;

9) $-\arcsin 0{,}1\sqrt{10}$; 10) $\arccos 0{,}75$.

1407. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{5}$; 3) 0; 4) $-\frac{\pi}{4}$. **1408.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) 0; 3) $\frac{3\pi}{10}$;

4) π. **1409.** 1) $\frac{2\pi}{5}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$. **1410.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{6}$;

3) $\frac{\pi}{2}-1$; 4) $2-\pi$. **1411.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1; 3) корней нет;

4) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$; 5) $\frac{\pi}{6}$.

ГЛАВА IX

1412. $60°k$. **1413.** $-30°$; $30°$; $60°$; $120°$; $150°$; $210°$; $240°$; $300°$.

1414. 1) $15°$, $135°$, $255°$; 2) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; 3) $60°$, $120°$, $240°$ и $300°$;

4) $45°$ и $135°$; 5) $30°$, $90°$, $210°$ и $270°$.

1415. 1) $90°k+30°$; 2) $\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{6}$; 3) $45°k$; 4) $\frac{\pi k}{3}$; 5) $30°k+15°$; 6) $\frac{\pi k}{3}$;

7) $60°k+20°$; 8) $180°k\pm 60°$.

1416. 1) $x_1=180°k$ и $x_2=60°k+30°$; 2) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $x_2=\frac{\pi}{5}k$;

3) $x=\frac{\pi k}{4}$; 4) $x=\frac{2}{5}\pi k+\frac{1}{30}\pi$; 5) $x_1=72°k+36°$ и $x_2=360°k\pm 60°$.

1417. πk. **1418.** $\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **1419.** πk. **1420.** $\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **1421.** $\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

1422. $\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **1423.** $2\pi k$. **1424.** $\pi(2k+1)$. **1425.** $\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

1426. $\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **1427.** $2\pi k\pm\frac{2\pi}{3}$. **1428.** $\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **1429.** $\pi k\pm\frac{\pi}{3}$.

1430. $180°\cdot k-31°$. **1431.** $180°\cdot k+170°$. **1432.** $2\pi k\pm\frac{5\pi}{6}$. **1435.** $180°\cdot k-60°$.

1436. $18°(2k+1)$. **1437.** $120°\cdot k+10°$ и $120°\cdot k+50°$. **1438.** $720°\cdot k+60°$.

1439. $\frac{\pi k}{5}+\frac{\pi}{10}$. **1440.** $2\pi k+\frac{7\pi}{12}$ и $2\pi k-\frac{13\pi}{12}$. **1441.** $\pi k+\frac{\pi}{6}-1$.

1442. $3\pi k+\frac{3}{4}$. **1443.** $90°\cdot k-62°$. **1444.** $\frac{1}{5}\left(2\pi k+\arccos\frac{2}{3}\right)$.

1445. $60°\cdot k\pm 10°$. **1446.** $360°\cdot k-120°$. **1447.** $45°\cdot k+22°30'$.

1448. Решение. $\pi x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x = \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}$.

При $k=0$ $x_1 = \frac{1}{4}$; при $k=1$ $x_2 = \frac{3}{4}$;

при $k=2$ $x_3 = 1\frac{1}{4}$. **1449.** $\frac{2}{3}$ и $1\frac{1}{3}$. **1450.** $\frac{1}{3}$ и $1\frac{1}{3}$.

1451. $\pm\sqrt{k}$, где $k = 0; 1; 2; \ldots$ **1452.** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2k+1}$, $k = 0; 1; 2; \ldots$

1453. $\pm\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ и $\pm\sqrt{2\pi k \pm \frac{\pi}{3}}$, $k = 1; 2; 3; \ldots$

1454. Решение. $\cos x = \begin{cases} 2\pi k + \frac{\pi}{6}, \\ 2\pi k + \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

Так как $|\cos x| \leqslant 1$, то $\cos x = \frac{\pi}{6}$, $x = 2\pi k \pm \arccos\frac{\pi}{6}$.

1455. Корней нет. **1456.** $\frac{1}{2}\left(\pi k \pm \arccos\frac{\pi}{4}\right)$.

1457. $x_1 = \begin{cases} 2k + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{3}, \\ 2k + 1 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{3}; \end{cases}$

$x_2 = \begin{cases} 2k - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3}, \\ 2k + 1 + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3}. \end{cases}$

1459. 1) Равносильны; 2) неравносильны.

1460. $\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **1461.** $2\pi k \pm \frac{3\pi}{4}$.

1462. $30°(12k \pm 1)$ и $90°(4k-1)$. **1463.** $90°k$. **1464.** $\frac{\pi}{3}(2k+1)$.

1465. Корней нет. **1466.** $2\pi k + \frac{3\pi}{4}$.

1467. $\pi k + \operatorname{arctg} 3$ и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **1468.** πk и $\frac{\pi}{6}(6k-1)$.

1469. $\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **1470.** $2\pi k + \frac{\pi}{6}$ и $2\pi k + \frac{5\pi}{6}$.

1471. $\pi(2k+1)$ и $\frac{4\pi}{3}(3k \pm 1)$. **1472.** πk и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

1473. $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{24}$ и $\frac{\pi k}{2} + \frac{5\pi}{24}$. *Указание.* Применить формулы:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ и $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

1474. 19°28′; 160°32′; 4°47′; 175°13′.

1477. 1) Равносильны; 2) неравносильны; 3) неравносильны;

4) равносильны. **1478.** $2\pi k$.

1479. $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$ и $\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **1480.** $\frac{\pi k}{2}$. **1481.** $\frac{\pi k}{5}$ и $\frac{\pi k}{4}$.

1482. $2\pi k$ и $\pi(4k+1)$. **1483.** $\frac{\pi}{2}(4k+1)$ и $\pi(2k+1)$.

1484. $2\pi k$ и $\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **1485.** πk и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **1486.** πk и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

Указание. Умножить обе части уравнения на $\cos x$.

1487. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **1488.** $\frac{\pi}{4}(2k+1)$ и $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$.

1489. $90°(4k-1)$ и $90°(8k+1)$.

1490. $\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $2\pi k$ и $\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **1491.** $90°(2k+1)$ и $60°(6k \pm 1)$.

1492. $\frac{2\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{2}(4k-1)$ и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **1493.** $\frac{\pi}{8}(2k+1)$ и $\frac{\pi k}{3}$.

1494. $\frac{\pi k}{2}$ и $\frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **1495.** $\frac{\pi k}{2}$. **1496.** $\frac{\pi k}{2}$ и $\frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$.

1497. $\pi(2k+1)$; $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $\frac{2\pi k}{5}$.

1498. $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $\frac{2\pi k}{3}+\frac{\pi}{18}$ и $\frac{2\pi k}{3}+\frac{5\pi}{18}$.

1499. 1) $\alpha+\beta=\pi(2k+1)$ или $\alpha-\beta=2\pi k$; 2) $\alpha+\beta=2\pi k$ или $\alpha-\beta=2\pi k$; 3) и 4) $\alpha-\beta=\pi k$.

1500. 1) $\frac{\pi}{4}(4k+1)$; 2) πk; 3) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; 4) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

1501. 1) Если бы $\sin x=\sec x$, то было бы $\sin x=\frac{1}{\cos x}$, т. е. $\sin x\cdot\cos x=1$ или $\sin 2x=2$.

1502. 1) $x+y=2\pi k$ или $x-y=\pi(2k+1)$;
2) $x+y=\pi(2k+1)$ или $x-y=\pi(2k+1)$; 3) $x+y=\pi k$.

1503. 1) πk и $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; 2) $360°k+170°$ и $360°k+10°$.

1504. 1) $\frac{\pi}{5}(2k+1)$ и $2\pi k$; 2) $360°k+160°$ и $360°k+20°$.

1505. 1) $\pi(2k+1)$ и $\frac{2\pi k}{3}$; 2) $240°k+130°$ и $240°k-10°$.

1506. 1) $\frac{\pi k}{5}$; 2) $120°k \pm 4°$.

1507. 1) $\frac{\pi k}{4}$ и $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$; 2) $180°\cdot k \pm 25°$.

1508. 1) $120°k-70°$ и $120°k+40°$; 2) $\frac{\pi}{6}(4k-1)$. **1509.** $\frac{2\pi k}{5} \pm \frac{3\pi}{40}$.

1510. $15°(4k+1)$. **1511.** $\frac{\pi k}{5}$. **1512.** $\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **1513.** $\frac{\pi k}{3}-\frac{1}{3}$.

1514. Корней нет. **1515.** Решение. Разделим обе части уравнения на $\operatorname{tg} 3x$: $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} 3x}$; $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 3x$; $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$; $2x = \frac{\pi}{2} + 3x = \pi k$;

$x = \frac{\pi}{10}(2k+1)$. **1516.** $\frac{\pi}{20}(4k+1)$ и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. *Указание.* Разделить обе части уравнения на $\sec 4x$. **1517.** Решение. 1) $0{,}5x^2 + x = 2\pi k$; $x^2 + 2x - 4\pi k = 0$; $x = -1 \pm \sqrt{1 + 4\pi k}$, где $k \geqslant 0$; 2) $0{,}5x^2 - x = 2\pi k$; $x^2 - 2x - 4\pi k = 0$; $x = 1 \pm \sqrt{1 + 4\pi k}$, где $k \geqslant 0$. **1518.** $(\sqrt{1 + 2k} - 1)^2$, $k \geqslant 0$; $(\sqrt{1 - 2k} + 1)^2$, $k \leqslant 0$ и 0. Решение. 1) $2\pi\sqrt{x} + \pi x = 2\pi k$; $x + 2\sqrt{x} - 2k = 0$; $\sqrt{x} = -1 \pm \sqrt{1 + 2k}$, $k \geqslant 0$. Так как $\sqrt{x} \geqslant 0$, то пригоден только корень $-1 + \sqrt{1 + 2k}$. Следовательно, $x_1 = (-1 + \sqrt{1 + 2k})^2$, $k \geqslant 0$. 2) $2\pi\sqrt{x} - \pi x = 2\pi k$; $x - 2\sqrt{x} + 2k = 0$; $\sqrt{x} = 1 \pm \sqrt{1 - 2k}$, $k \leqslant 0$. Так как $\sqrt{x} \geqslant 0$, то корень $1 + \sqrt{1 - 2k}$ пригоден при любых значениях $k \leqslant 0$, а корень $1 - \sqrt{1 - 2k}$ — только при значении $k = 0$. Следовательно, $x_2 = (1 + \sqrt{1 - 2k})^2$, $k \leqslant 0$ и $x_3 = 0$. **1519.** $180°k$. **1520.** $\frac{\pi}{6}(2k+1)$.

1521. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **1522.** $\frac{\pi}{8}(4k+1)$.

1523. Решение. $[\sin^2(45° + x) - \sin^2(30° - x)] - \sin 15° \cdot \cos(15° + 2x) = \sin x$;
$\sin 75° \cdot \sin(15° + 2x) - \sin 15° \cdot \cos(15° + 2x) = \sin x$;
$\sin[(15° + 2x) - 15°] = \sin x$; $\sin 2x = \sin x$;

$x_1 = \frac{\pi}{3}(2k+1)$ и $x_2 = 2\pi k$. **1524.** Решение. Преобразуем левую часть уравнения так: $\sqrt{3}\sin 2x - (1 - 2\sin^2 x) = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x =$
$= 2(\cos 30° \cdot \sin 2x - \sin 30° \cdot \cos 2x) = 2\sin(2x - 30°)$.
Уравнение примет вид: $\sin(2x - 30°) = \cos x$; $\cos(120° - 2x) = \cos x$;

$x_1 = 120°(3k+1)$; $x_2 = 40°(3k+1)$. **1525.** $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **1526.** $60°k + 7°16'$.

1527. $\frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **1528.** $180°k - 75°$.

1529. $\frac{\pi}{4}(4k-1)$ и $\pi k - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$.

1530. $\frac{\pi}{20}(4k+1)$ и $\frac{1}{5}\left(\pi k + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}\right)$.

1531. πk; $\frac{\pi}{4}(4k-1)$ и $\frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **1532.** πk и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

1533. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$ и $\pi k - \operatorname{arc\,tg} 2$. **1534.** $\frac{1}{2}\left(\pi k + \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)$ и $\frac{\pi}{8}(4k-1)$.

1535. $\pi k + \operatorname{arc\,tg} 3$ и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

1536. $2\pi k + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ и $2\pi k - 2\operatorname{arc\,tg} 2$. **1537.** $\pi k - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$.

1538. $\pi k + \operatorname{arc\,tg} 5$ и $\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **1539.** $\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **1540.** $\frac{\pi}{8}(4k-1)$.

1541. $\frac{\pi}{12}(12k-1)$. **1542.** $\frac{\pi}{2}(4k+1)$ и $\frac{\pi}{6}(12k-1)$.

1543. $120°k \pm 40° - 20°$. **1544.** $180°(4k+1)$ и $60°(12k+1)$.

1545. $360°k + 53°08'$ и $360°k - 36°52'$.

1546. $360°k + 64°16'$ и $360°k + 228°20'$. **1547.** $360°k + 150°$ и $360°k + 60°$.

1548. $2\pi k + \frac{7\pi}{6} - \arcsin\frac{\pi}{8}$ и $2\pi k + \frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{\pi}{8}$.

1549. $180°k + 45°$ и $180°k - 75°$. **1550.** $\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

1551. $180°k - 10°$ и $180°k - 70°$. **1552.** $\frac{\pi k}{7}$ и $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$.

1553. $\frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **1554.** $\frac{\pi}{10}(10k-1)$. **1555.** $\frac{\pi k}{8}$.

1556. $\frac{\pi k}{2} - 1$ и $\frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{10} - 1$. **1557.** $\frac{2\pi k}{3} + \frac{5\pi}{18}$ и $\frac{2\pi k}{3} + \frac{29\pi}{90}$.

1558. $30°(6k \pm 1)$. **1560.** Нельзя. **1561.** 1) Равносильны; 2) неравносильны.

1562. $\frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **1563.** $\frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{6}$. **1564.** Нет корней. **1565.** $2k+1$.

1566. πk. **1567.** $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **1568.** $2\pi k$. **1569.** $\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

1570. Корней нет. **1571.** $2\pi k$ и $\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **1572.** $2\pi k + \frac{\pi}{6}$ и $2\pi k + \frac{5\pi}{6}$.

1573. $\pi k + \frac{\pi}{12}$ и $\pi k + \frac{5\pi}{12}$. **1574.** $\frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$. **1575.** $\frac{4\pi}{3}(3k \pm 1)$.

1576. πk. **1577.** $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $\frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. **1578.** $\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

1579. $\frac{\pi}{3}(3k+1)$. **1580.** $2\pi k$ и $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **1581.** Корней нет.

1582. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $y = \frac{\pi}{6} - 2\pi k$.

1583. $x = 360°\cdot k \pm 30° + 30°$; $y = 360°\cdot k \pm 30° - 30°$.

1584. $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$; $y = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$.

1585. $x = \frac{5\pi}{12} \pm \frac{\pi}{12} + \pi k$; $y = \frac{5\pi}{12} \mp \frac{\pi}{12} - \pi k$.

1586. $x = 180°\cdot k \pm 60° + 30°$; $y = 180°\cdot k \pm 60° - 30°$.

1587. $x = 90°k + (-1)^k 30° + 30°$; $y = 90°\cdot k + (-1)^k 30° - 30°$.

1588. $x = \pi k \pm \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}$; $y = \frac{\pi}{8} - \pi k \mp \frac{\pi}{8}$.

1589. $x = \pi k \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$; $y = \pi k \pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$.

1590. $x = 90°\cdot k + 35°$; $y = 90°\cdot k + 25°$.

1591. $x = 30° + 180°\cdot k$; $y = 30° - 180°\cdot k$.

1592. $x_1 = \pi k + (-1)^k \frac{\pi}{6}$; $y_1 = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$;

$x_2 = \pi k - (-1)^k \frac{\pi}{6}$; $y_2 = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$.

1593. Р е ш е н и е. Преобразуем второе уравнение так:

$$\frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 3; \quad \frac{0{,}75}{\cos x \cdot \cos y} = 3;$$

$\cos x \cdot \cos y = 0{,}25$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0{,}75; \\ \cos x \cdot \cos y = 0{,}25. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно уравнения, получим:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1; \\ \cos(x + y) = -0{,}5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 360°k; \\ x + y = 360°n \pm 120°; \end{cases}$$

$$x = 180°(k + n) \pm 60°,$$

$$y = 180°(n - k) \pm 60°.$$

О т в е т: $x_1 = 180°(n + k) + 60°$; $x_3 = 180°(n + k) - 60°$;
$y_1 = 180°(n - k) + 60°$; $y_3 = 180°(n - k) + 60°$;
$x_2 = 180°(n + k) + 60°$; $x_4 = 180°(n + k) - 60°$;
$y_2 = 180°(n - k) - 60°$; $y_4 = 180°(n - k) - 60°$.

1594. 1) $x = \frac{1}{\pi k}$; 2) $y = 1$, если $x = \frac{1}{\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right)}$;

$y = -1$, если $x = \frac{1}{\pi\left(2k - \frac{1}{2}\right)}$.

1595. $\frac{\pi}{5}(5k \pm 1)$, $\frac{\pi}{5}(5k \pm 2)$ и $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$. **1596.** $\frac{\pi}{2}(3k \pm 1)$.

Указание. Прибавить к обеим частям уравнения по $2\sin^2\frac{x}{3} \cdot \cos^2$

1597. $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$. **1598.** $\frac{\pi}{4}(2k + 1)$. **1599.** $2\pi k \pm \arccos\frac{1}{3}$.

1600. $\frac{\pi}{4}(2k + 1)$; $\frac{\pi}{24}(12k + 1)$ и $\frac{\pi}{24}(12k + 5)$. **1601.** $\frac{\pi}{4}(2k + 1)$.

1602. $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$ и $\frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. **1603.** $\frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$ и $\pi(2k + 1)$.

1604. $\frac{\pi}{24}(4k - 1)$ и $\frac{\pi}{40}(4k + 1)$. **1605.** $\frac{\pi}{6}(2k + 1)$ и $\frac{\pi}{12}(2k + 1)$.

1606. $180° \cdot k - 60°$ и $180° \cdot k + 40°$. **1607.** $\frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$ и $\frac{\pi}{8}(4k + 1)$.

1608. $\frac{\pi}{4}(4k - 1)$ и πk. **1609.** $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$ и $\pi(2k + 1)$.

1610. $\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **1611.** πk и $\frac{\pi}{4}(4k-1)$.

Указание.

$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$, $\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1+\sin 2x}{2}\right)^2$.

1612. $\frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **1613.** $\frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$.

1614. $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$; $\frac{\pi}{11}(2k+1)$ и $2\pi k$. **1615.** $\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

1616. $\frac{\pi}{2}(4k+1)$ и $2\pi k$. *Указание.* Воспользоваться подстановкой: $\sqrt{\sin x + \cos x} = z$.

1617. $\frac{1}{2}\left(\pi n + \operatorname{arc ctg}\frac{4k+1}{4}\right)$, где $k = 0, \pm 1; \pm 2; \ldots$ и

$\frac{1}{2}\left[\pi n + (-1)^n \arcsin\frac{4}{4k+1}\right]$, где $k = 1; 2; 3; \ldots$ и $k = -2; -3; -4; \ldots$

1618. $2\pi k \pm \arccos\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{\pi}{4}$.

1619. $2\pi k \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} \pm \frac{\pi}{4}$ **1620.** $2k \pm \frac{1}{3}$.

1621. $2\pi k + \alpha$ и $2\pi k$, если $\alpha \neq 2\pi k$; x — любое действительное число, если $\alpha = 2\pi k$. **1622.** $\frac{\pi}{2}(4k+1)$, если $\alpha \neq \pi(2k+1)$; x — любое действительное число, если $\alpha = \pi(2k+1)$. **1623.** $\frac{\pi k}{m-1}$, где $\frac{k}{m-1}$ — число не целое.

1624. $\pi k + \operatorname{arc tg}\frac{-a \pm b}{a+b}$, если $a \neq -b$; $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $\frac{\pi}{4}(4k-1)$, если $a = -b \neq 0$, x — любое действительное число, если $a = b = 0$.

1625. $2\pi k + 2\operatorname{arc tg}\frac{a+1 \pm \sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1}$, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$ и $a \neq \frac{1}{3}$; $\pi(2k+1)$ и $2\pi k + \operatorname{arc tg}\frac{4}{3}$, если $a = \frac{1}{3}$.

1626. $\pi k \pm \frac{\pi}{6}$, если $\alpha \neq \frac{\pi}{4}(2k+1)$; x — любое действительное число, если $\alpha = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **1627.** 75°31′ и 28°58′. **1628.** 15°.

1629. $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{m} - \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} - 2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{m}$, $\sqrt{2} \leqslant m < 2$; при $m = \sqrt{2}$ ромб будет квадратом. **1630.** $x = 180° \cdot k + 30°$; $y = 180° \cdot k - 120°$.

1631. $x = \pi k + \operatorname{arc tg}\frac{1}{2}$; $y = -\pi k + \operatorname{arc tg} 2$.

1632. $x = \frac{\pi k}{2} + \frac{3\pi}{8}$; $y = -\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}$. **1633.** $A = 60°$; $B = 30°$.

1634. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **1635.** $A - B = \pi k$ или $A + B = \frac{\pi}{2}(4k+1)$.

1636. $\approx 0{,}74$. **1637.** $\frac{\pi}{2}$ и π.

1640. 1) 2; 2) бесчисленное множество; 3) бесчисленное множество; 4) 3.
1641. 1. **1642.** 3 и 2. **1643.** 2 и 1.
1644. x — любое действительное число, удовлетворяющее условию $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

1645. x — любое действительное число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1646. 1. **1647.** -1 и -2. **1648.** $\frac{1}{7}$. **1649.** $\sqrt{3}$. **1650.** $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **1651.** 0.

1652. $\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$, если $m \geqslant 0$; $n \geqslant 0$, но по крайней мере одно из чисел m или n отлично от нуля; $-\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$, если $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$, но по крайней мере одно из чисел m или n отлично от нуля; нет решений, если $m > 0$, $n < 0$ или $m < 0$, $n > 0$; уравнение противоречиво, если $m = n = 0$.

ГЛАВА X

1654. $\frac{ab}{\cos\alpha}$. **1655.** $\frac{4a\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **1656.** $\frac{mn}{4\cos\alpha}$. **1657.** $\frac{a^2}{2\cos\alpha} = 14\,220$.

1658. $\frac{a^2}{\sin\alpha}$. **1659.** 1) $\frac{a^2}{8\cos\alpha}$; 2) $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **1660.** $4a^2\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ и $4a^2\sin\frac{\alpha}{2}$.

1661. $\frac{p^2\sin\alpha}{16\sin^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\beta} = 209{,}8\ м^2$.

1662. $4d^2\sin 45^\circ\sin\alpha\cos(45^\circ-\alpha)\operatorname{tg}\beta = 1585$.
1663. $0{,}25d^3\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos\beta = 540{,}3\ см^3$.

1664. $\frac{h^3\operatorname{ctg}\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$, где $\alpha < \beta$; $V = 9574\ дм^3$.

1665. $0{,}5h^3\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\sin\beta = 0{,}2828\ м^3$. **1666.** $0{,}5\,a\,(b^2-a^2)\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 1404\ дм^3$.

1667. $\frac{d^3}{\sin\alpha}\sin^2\beta\cdot\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}$, где $\beta < \alpha$; $2212\ дм^3$.

1668. $2a^2b\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$, где $\beta > \frac{\alpha}{2}$; $11\,140\ дм^3$.

1669. $\frac{pq}{a}\sin\alpha$. **1670.** $\frac{a^2b^2\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{a^2+b^2}} = 207{,}1\ м^3$.

1671. $0{,}5h^3\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta = 0{,}0025\ м^3$, $2h^2\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sec x$, где $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$.

1672. $\frac{H^3\sin\beta}{\sin^2\alpha}\sqrt{\cos(\beta+\alpha)\cdot\cos(\beta-\alpha)} = 1\,946\,000$.

1673. $2ab\sin\alpha\sqrt{-ab\cdot\cos\alpha}$, где $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

1674. $\frac{H^3\sin\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$, где $\alpha > \beta$.

1675. $\cos\theta = \sin\alpha \cdot \sin\beta$. **1676.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. **1677.** $\frac{m^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\cos\beta}$.

1678. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. **1679.** $\frac{24q}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)} = 299{,}5\ см^2$.

1680. $4\sqrt{2}H^2 \operatorname{ctg}\alpha = 445{,}1\ м^2$. **1681.** $2c^2\sin\alpha\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right) = 96{,}96\ м^2$.

1682. $\frac{6\sqrt{6}H^2\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\cdot(\alpha+45^\circ)}{\sin\alpha} = 6170\ м^2$.

1683. $\frac{8\sqrt{2}H^2\operatorname{ctg}\beta\cdot\sin(\beta+45^\circ)}{\sin\beta} = 0{,}079\ м^2$.

1684. $2a^2(2+\sin\alpha)$. **1685.** $\frac{b^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{8\sin\frac{\alpha}{2}} = 8333\ м^3$.

1686. $a^3\operatorname{tg}\alpha = 4650\ дм^3$, $\cos\varphi = \operatorname{ctg}\alpha$. **1687.** $\frac{1}{2}d^3\sin\beta\cdot\cos^2\beta\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 1969\ м^3$.

1688. $\frac{\sqrt{3}}{12}h^3\operatorname{ctg}^2\alpha = 4423$; $\frac{\sqrt{3}}{6}h^2\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\alpha+6)$.

1689. $bq\cos\beta$. **1690.** $Sb\cos\alpha$. **1691.** $\frac{p^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{16\cos^6\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)} = 2367\ см^3$.

1692. $2aR^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta) = 302{,}1$. **1693.** $6r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = 208{,}4\ дм^3$.

1694. $b^3\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right) = 1{,}013\ дм^3$.

1695. $\frac{2R^3}{\cos^4\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos 2\alpha\sqrt{\cos(30^\circ+\alpha)\cdot\cos(30^\circ-\alpha)}$, где $0<\alpha<45^\circ$.

1696. $\frac{1}{2}a^3\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)}$, где $30^\circ<\alpha<150^\circ$.

1697. $\frac{1}{4}a^3\operatorname{tg}\alpha = 16200\ см^3$.

1698. $4m^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}$, где $0^\circ<\alpha+\beta<90^\circ$.

1699. $\frac{P^3}{64}\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha} = 682600$.

1700. $\frac{a^3\operatorname{ctg}\alpha}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}$, где $\beta<\alpha$.

1701. $2b^3\sin^2A\cdot\cos\frac{A}{2} = 134{,}1$. **1702.** $\frac{b^2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$ $103{,}4\ дм^2$.

1703. $\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **1704.** $\sqrt[3]{\dfrac{4V\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{3\sin\left(30^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\beta}{2}\right)}}}$, где $\beta<60$.

1705. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\sin\alpha$. **1706.** $\dfrac{a^2\sin\alpha}{4\cos\beta}$. **1707.** $\dfrac{3a^2}{16\cos\alpha}$. **1708.** $\dfrac{d^2\operatorname{ctg}\alpha}{4}$.

1709. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{27\cos\alpha}$. **1710.** $\dfrac{a^2\cos\alpha\cdot\sin^2 2\beta}{\sin^2 3\alpha}$.

1711. $\dfrac{a^2\sin^2 2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} = 62{,}24$ *дм*². **1712.** $\dfrac{b^2\cos 2\beta}{\cos\beta}$, где $\beta<45^\circ$.

1713. $a\sqrt{2\cos\gamma}$ и $\dfrac{4a\sqrt{2}\sin\left(30^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\gamma}$, где $\gamma<45^\circ$.

1714. $\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{27\cos\alpha}$. **1715.** $\operatorname{tg}x = \dfrac{2S\sqrt{2}}{a^2}$; $x = 50^\circ35'$. **1716.** $2R^2\operatorname{tg}\alpha$; $\cos x = \operatorname{ctg}\alpha$.

1717. $4\sqrt{2}b^2\cos\alpha\cdot\cos(\alpha-45^\circ)$, где $45^\circ<\alpha<90^\circ$.

1718. $\dfrac{2a^2}{\cos\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 110{,}7$ *м*². **1719.** $\dfrac{1}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\dfrac{T\cos\beta}{2}} = 30{,}91$ *дм*.

1720. $\dfrac{m^2\sqrt{2}}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+\frac{1}{2}}$; $\dfrac{1}{12}m^3\operatorname{tg}\beta$. **1721.** $\dfrac{16}{3}a^3\operatorname{ctg}^2\alpha = 40\,170$.

1722. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\sqrt[3]{36V^2\operatorname{tg}\alpha} = 55{,}18$ *дм*².

1723. $\dfrac{8Q}{\pi\cos\beta}\cos^2\dfrac{\beta}{2}$; $\dfrac{4}{3}\operatorname{tg}\beta\sqrt{\dfrac{Q^3}{\pi^3}} = 2{,}556$ *м*³.

1724. $\dfrac{C^2}{2\pi^2}\left(\sqrt{2\operatorname{ctg}^2\gamma+1}+1\right)$; $\dfrac{C^3}{12\pi^3}\operatorname{ctg}\gamma$.

1725. $\dfrac{4r^3\operatorname{ctg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\sqrt{\cos\alpha}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

1726. $\dfrac{4}{3}R^3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 3447$ *м*³.

1727. $3a^2\sqrt{3}\cos\alpha = 16\,500$ *дм*². **1728.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}b^2\cos\alpha\sqrt{3\sin^2\alpha+1}$.

1729. $\dfrac{3\sqrt{3}K\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}}$. **1730.** $\dfrac{3\sqrt{3}C^2\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}}$.

1731. $\dfrac{2\sqrt{3}r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos\alpha} = 2137$. **1732.** $\dfrac{b^3}{24}\operatorname{ctg}\beta$.

1733. $\dfrac{a^3}{12\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$ и $\dfrac{3}{4}a^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$,

где $0 < \alpha < 120°$.

1734. $\frac{3}{4} R^3 \sin^2\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(30° - \frac{\alpha}{2}\right)}$,

где $0 < \alpha < 120°$.

1735. $2\sqrt{3}h^2 \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **1736.** $12d^2 \sin 2\alpha$.

1737. $\frac{3m^2 \sin\alpha}{4\sin^2\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right)}$. **1738.** $\frac{5m^2 \operatorname{tg} 36° \cdot \cos\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

1739. $\frac{a^2 n \cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\frac{180°}{n} = 2820$. **1740.** $\frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha = 16{,}99$ *дм*³.

1741. $2na^2 \cos\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n} = 146{,}4$ *см*²; $\frac{1}{3} na^3 \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$.

1742. $\frac{nd^3 \sin\frac{360°}{n}}{3\sin\beta \cdot \sin 2\beta}$.

1743. $\frac{na^3 \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}}{24\sin\frac{180°}{n} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin\left(\frac{180°}{n} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{180°}{n} - \frac{\alpha}{2}\right)}$;

$\frac{na^2 \sin\left(\frac{180°}{n} + \frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin\frac{180°}{n} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$. **1744.** $\frac{S}{3} \sin\alpha \sqrt{\frac{S}{n} \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}}$.

1745. $\frac{b^3}{6} \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 0{,}0246$. **1746.** $\frac{2H^2 \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 957{,}2$.

1747. $\frac{b^3}{6} \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$. **1748.** $\frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{6\cos\alpha} = 536\,700$; $BC = \frac{a \operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}$.

1749. $\frac{b^3}{6} \sin\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = 212{,}7$ *см*³.

1750. $\frac{1}{9} h^3\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2\alpha$ и $\frac{4h^2\sqrt{3} \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 15°\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 15°\right)}{3\sin\alpha} = 149{,}1$

1751. $\frac{1}{6} b^3 \sin\alpha$. **1752.** $\frac{h^3 \sin^2(\alpha - \beta)}{3\sin^2\alpha \cdot \sin^4\beta} = 163\,700$.

1753. $\frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 15°\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 15°\right)$.

1754. $\frac{H^3}{3} \operatorname{ctg}\alpha$; $\frac{2\sqrt{2}H^2 \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} \cdot \sin\left(22°30' + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(22°30' - \frac{\alpha}{2}\right)$.

1755. $\frac{1}{6} b^3 \sin 2\alpha \cdot \sin 2\gamma \cdot \cos\gamma = 40{,}04$ *дм*³.

1756. $\frac{1}{24} a^3 \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 8026$ *м*³; $180° - 2\beta$.

1757. $\frac{1}{12}a^3 \sin 2\alpha \cdot \sin^2\alpha \operatorname{tg}\beta = 133.$

1758. $\frac{1}{12}ab \operatorname{tg}\alpha\sqrt{a^2+b^2}$. **1759.** $\frac{2}{3}h^3 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot \operatorname{ctg}^2\varphi = 135{,}4\ дм^3.$

1760. $\frac{1}{6}b^3 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\beta = 1{,}3\ дм^3$. **1761.** $\frac{a}{6}\sqrt[3]{36\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

1762. $\frac{b \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$. **1763.** $\frac{b \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\varphi}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

1764. $\frac{S^2 \operatorname{ctg}\beta}{3P}$. *Указание.* $S = rp$, где r — радиус вписанной окружности.

1765. $\frac{l^2}{2\cos\alpha}$. **1766.** $\frac{ab}{2\cos\alpha}$. **1767.** $\cos\alpha = \frac{B}{S}$, где $B < S$. **1768.** $\frac{1}{3}QH\cos\alpha$.

1769. $\frac{1}{18}S\sin\varphi \cdot \sqrt{6S\cos\varphi\sqrt{3}}$. **1770.** $\frac{4}{3}\sin\alpha \cdot \sqrt{Q^3\cos\alpha} = 32{,}26\ м^3$.

1771. $\frac{c^2 \sin 2\alpha \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}}{2\cos\beta} = 167{,}7\ см^2$. **1772.** $\frac{a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}}{2\cos\beta} = 74\,220.$

1773. $\frac{h^2}{\cos\varphi \cdot \sin 2\beta} = 2347$; $\frac{2h^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi \cdot \sin 2\beta}$. **1774.** $\frac{2Q}{\sin\varphi} \cdot \cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$.

1775. $\frac{3}{4}a^2 \operatorname{tg}\alpha$. **1776.** $\frac{d^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta} = 591{,}9.$

1777. $\frac{Q\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$. **1778.** $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\sqrt[3]{9V^2\operatorname{tg}\beta}$.

1779. $\cos x = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$; если $n = 4$, то $\cos x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1780. $\frac{S\sqrt{2}\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 155{,}3\ дм^2$. **1781.** $\frac{4}{3}l^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

1782. $\frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

1783. $\frac{d^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}}{6\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$. **1784.** $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$.

При $n=4$, $\operatorname{tg} x=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$; при $n=3$, $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **1785.** $\dfrac{1}{2}m^2\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}$.

1786. $\dfrac{a^2\sec^2\varphi}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}$ и $\dfrac{a^2\sec^2\varphi}{\cos\alpha}$, где $\operatorname{tg}\varphi=\cos\alpha$.

1787. $\sin\dfrac{\theta}{2}=\cos\alpha\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{n}$. При $n=3$, $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

1788. $\dfrac{K\sqrt{3K\sin\left(60^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(60^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}}{4\pi\sqrt{\pi}\sin\dfrac{\theta}{2}}$.

1789. $\cos x=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Если $\angle BSC=\beta$, то $\cos x=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$.

1790. $\dfrac{1}{3}b^3\sin\dfrac{\beta}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)}$, где $\dfrac{\beta}{2}<\alpha$. При $\alpha=\beta=90^\circ$ пирамида превращается в шестую часть куба с ребром b, объём которой равен $\dfrac{1}{6}b^3$. Подстановка в полученную формулу значения $\alpha=\beta=90^\circ$ даёт тот же результат: $V_{пир}=\dfrac{1}{3}b^3\sin 45^\circ\sqrt{\sin 135^\circ\cdot\sin 45^\circ}=\dfrac{1}{6}b^3$.

Указание. Определяя объём, за основание пирамиды принять боковую грань с углом β.

1791. $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **1792.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$, где $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

1793. $-\dfrac{2}{3}l^3\dfrac{\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\beta}{\sin^3\dfrac{\beta}{2}}$, где $90^\circ<\beta<180^\circ$. **1794.** $\dfrac{2q\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{-\cos\varphi}}$.

1795. $\dfrac{3a^2}{8\sqrt{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+30^\circ\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-30^\circ\right)}}$, где $60^\circ<\varphi<180^\circ$.

1796. $\dfrac{2a^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{3\sqrt{-\cos\alpha}}$, где $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

1797. $\dfrac{H^3\sqrt{3}}{\cos^2\alpha}\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)$, где $30^\circ<\alpha<90^\circ$.

1798. $\dfrac{na^3\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}}{3\sqrt{-\cos\left(\alpha+\dfrac{180^\circ}{n}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\dfrac{180^\circ}{n}\right)}}$.

1799. $\frac{a^3}{12}\operatorname{tg}\alpha$ и $\frac{a^2}{4}\sqrt{12\operatorname{tg}^2\alpha+3}$. 1800. $\frac{4}{3}h^3\sin^2\alpha\cdot\cos 2\alpha = 58{,}62$ *м*³.

1801. $\frac{a^3\sin(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta}{12\sin\alpha\cdot\cos\beta} = 3{,}026$ *м*³ и $\frac{a^3\sin(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta}{12\sin\alpha\cdot\cos\beta}$.

1802. $a^3\sqrt{3}\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$. 1803. $\frac{2}{3}h^3\operatorname{tg}^2\alpha$ и $\frac{h^2\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\alpha} = 277{,}1$ *дм*².

1804. $\frac{4}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 1805. $\frac{16}{3}h^3\operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right) = 130{,}9$ *м*³.

1806. $\frac{b^3}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)} = 1390$.

1807. $\frac{b^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha} = 59{,}41$ *см*³. 1808. $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{6\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^3\cos\alpha}{2}} = 196{,}4$ куб. ед.

1809. $a^2\sin\beta\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right) = 642{,}2$ *м*². 1810. $\frac{1}{12}b^3\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

1811. $\frac{2}{3}h^3\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma = 6609$ *см*³. 1812. $\frac{2\sqrt{2}H^2\sin\alpha}{\sin(45^\circ-\alpha)}$.

1813. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}$. 1814. $\operatorname{tg}x = \frac{2Q\sqrt{2}}{a^2}$.

1815. $\frac{a^3\sin 2\alpha}{24\sqrt{2}\sin^3(\alpha+45^\circ)}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{\cos\alpha}$; $\operatorname{tg}\phi = \frac{2}{\sin\alpha}$.

1816. $\frac{c^3}{6}\sin^3\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. 1817. $\frac{c^3\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 45^\circ}{6\sin(45^\circ+\alpha)}$.

1818. $\frac{1}{3}d^3\operatorname{cosec}\frac{3\alpha}{2}$. 1819. $8a^3\sqrt{3}\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ+\alpha)$.

1820. $\frac{1}{12}a^3\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$. 1821. $-\frac{b^2\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}$ $(\cos 3\alpha < 0)$.

1822. $\frac{na^2\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}$; $\frac{na^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin 2\beta}{6\sin^2\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}}$,

где $\beta = \frac{180^\circ}{n}$.

1823. $\frac{2a^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{9\cos\alpha}$. 1824. $\frac{h^3\sqrt{3}\sin^2(\alpha+\beta)}{9\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$.

1825. $\frac{b^3\sin^2\beta\operatorname{ctg}\alpha}{3\sin\alpha}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.

1826. $8R^2\cos\alpha\sin^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right) = 548{,}1$ *дм*².

1827. $\frac{a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(22^\circ30'+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(22^\circ30'-\frac{\alpha}{4}\right) = 59{,}39$ *дм*².

1828. $\frac{\sqrt{2}(a-b)}{2\cos\alpha}$. **1829.** $\frac{\sqrt{3}}{6}(a-b)\operatorname{tg}\alpha$.. **1830.** $\frac{1}{2}(B-b)\operatorname{tg}\beta$.

1831. $\frac{1}{4}(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha$. **1832.** $\frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{4\cos\alpha}=721{,}3$.

1833. $\frac{4a^2\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos^2\alpha}$. **1834.** $\frac{4h^2(k+1)\cos\alpha}{k-1}$.

1835. $\frac{8H^2\operatorname{ctg}\alpha}{(n-1)^2\sin\alpha}\left(n^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **1836.** $\frac{7}{24}d^3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.

1837. $\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **1838.** $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$.

1839. $8\sqrt[3]{\frac{18V^2}{169\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha}}$. **1840.** $\frac{a^2d\sin\alpha\cos\beta(n^2+n+1)}{12\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

1841. $\frac{a^3}{12}\operatorname{tg}\alpha$. **1842.** $\frac{a^3(2+\operatorname{tg}\alpha)^3}{6\operatorname{tg}^2\alpha}$. **1843.** $\frac{4a^3\sec^6\varphi}{3\operatorname{tg}^2\alpha}$, где $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}}$.

1844. $\frac{2R^3\sin(\alpha-\beta)}{3\cos\alpha\cdot\cos\beta}$. **1845.** $\frac{a^3\sqrt{2}\sin^3\beta\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin^3(\alpha+\beta)}=15\,860\ дм^3$.

1846. $\frac{\sqrt{2}a^3\sin^3\alpha}{4\sin^3(45^\circ+\alpha)}=1575\ см^3$.

1847. $\frac{4}{3}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$, где $45^\circ<\alpha<90^\circ$.

1848. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=9{,}473\ м^3$.

1849. $\frac{\sqrt{3}l^2\cos\alpha\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\sin^2\beta}{16\sin^2(\alpha+\beta)}$. **1850.** $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{4}$

1851. $R^2\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=320{,}3\ дм^2$. **1852.** R и $R\sqrt{4\sin^2\alpha+1}$.

1853. $\frac{d^2\cos\alpha\cdot\cos(\varphi-\alpha)}{\sin\varphi}$, где $\operatorname{tg}\varphi=2\pi$; $\frac{d^3\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}{8\pi}=73770\ дм^3$.

1854. $\frac{\pi}{2}d^2\sin 2\alpha$; $\frac{\pi}{8}d^3\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha=3266\ дм^3$. **1855.** $\frac{\pi d^3\cos\beta\cdot\sin 2\beta}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

1856. $\frac{R^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. **1857.** $\frac{R^2\sin\alpha\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$, $\alpha+\beta\leqslant 90^\circ$.

1858. $CD=\frac{H\sin\beta\cdot\sin 2\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)\cdot\sin(\beta+\alpha)}$, $\alpha<\beta$. **1859.** $\frac{C^2}{4\pi\sin\beta}$.

1861. $\frac{360^\circ}{n}$; 90°. **1862.** $\frac{\pi p^2\sin\beta}{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)}=147{,}7\ м^2$.

1863. $\frac{\pi l^2\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha}$, $\alpha+\beta\leqslant 90^\circ$. **1864.** $51^\circ 50'$ (приближённо).

1865. $\frac{2\pi a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos^2\beta}$.

1866. $\dfrac{\pi a^2 \sin\dfrac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{4}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}} = 4613\ дм^2$. **1867.** $\dfrac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}$.

1868. $\dfrac{\pi Q}{\sin\alpha}$; $\dfrac{1}{3}\pi Q^{\frac{3}{2}}\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$. **1869.** $\dfrac{1}{3}\pi R^3\sin^3\alpha\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

1870. $\dfrac{\pi K\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{3\sin\beta}\sqrt{\dfrac{2K}{\sin\beta}}$; $\dfrac{4\pi K\cos\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\beta}$.

1871. $\dfrac{\pi a^3 \operatorname{tg}^2\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}}{24\sin^2\dfrac{\beta}{2}}$. **1872.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\dfrac{\alpha}{2}} = 74{,}98\ дм^3$.

1873. $\dfrac{1}{3}\pi a^3\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\dfrac{\beta}{2}}{\sin^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$. **1874.** $\dfrac{\pi R^3\sin(\alpha-\beta)}{3\cos\alpha\cdot\cos\beta}$. **1875.** $\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$.

1876. $\pi l^2\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$.

1877. $\dfrac{\pi h^2}{\cos\alpha}$, $45°\leqslant\alpha<90°$, при $\alpha=45°$ боковая поверхность конуса достигает своего наименьшего значения, равного $\sqrt{2}\pi h^2$.

1878. $\dfrac{\pi L^2}{\sqrt{1+3\sin^2\alpha}}$; $0°\leqslant\alpha\leqslant90°$. Наибольшее значение боковой поверхности конуса равно πL^2 (при $\alpha=0°$), наименьшее значение равно $\dfrac{1}{2}\pi L^2$ (при $\alpha=90°$).

1879. $2\pi l^2\sin\dfrac{\alpha+30°}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-30°}{2}$, $45°\leqslant\alpha\leqslant90°$.

1880. $\dfrac{\pi}{3}(R^3-r^3)\operatorname{tg}\alpha$. **1881.** $\dfrac{4K}{\sin^2\alpha}$; $2K\sqrt{\dfrac{K}{\pi}}\cdot\dfrac{\sec^2\varphi}{\sin^2\alpha}$, где $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}$.

1882. $\dfrac{\pi\sqrt{S^3}}{4}\operatorname{cosec}^2\varphi$, где $\operatorname{ctg}\varphi=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}$. **1883.** $\dfrac{\pi(1+n+n^2)a^3\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}{6(1-n)^2}$;

$\dfrac{\pi(1+n)a^2\cos\alpha}{1-n}$. **1884.** $\dfrac{1}{3}\sin 2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sqrt{\dfrac{S^3\cos\beta}{\pi^3}}$. **1885.** $\dfrac{\pi S\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}$.

1886. $\dfrac{2}{3}R^3\sin^2\alpha$. **1887.** $\dfrac{3\sqrt{3}Q\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\pi\cos\alpha}$. **1888.** $\dfrac{\pi a^3\operatorname{tg}\alpha}{9\sqrt{3}}$.

1889. $\dfrac{3\sqrt{3}H^2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$; $\sqrt{3}H^3\operatorname{ctg}^2\alpha$; $2\pi H^2\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\varphi$, где $\operatorname{ctg}\varphi=2\operatorname{ctg}\alpha$;

$\dfrac{4}{3}\pi H^3\operatorname{ctg}^2\alpha$. **1890.** $\dfrac{2\pi a^2}{\cos\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = 82080\ дм^2$.

1891. $\frac{2\sqrt{2}d^2\sin(\beta+45^\circ)}{\sin\alpha\cos\beta}=1810\ дм^2$. **1892.** $\frac{\pi V}{\sin 2\alpha}$. При $\alpha=45^\circ$ объём цилиндра принимает наименьшее значение, равное πV.

1893. $\frac{\pi V}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)}$. **1894.** $\frac{5}{3}\sin 36^\circ\cdot\sqrt{\frac{S^3\cos 36^\circ}{8\pi^3\cdot\operatorname{tg}\alpha}}$.

1895. $\frac{\pi b^2\sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}=602{,}9\ дм^2$.

1896. $\frac{\pi d^3\sin^2\beta\cdot\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}}{4\cos^3\alpha}=131{,}4\ дм^3$.

1897. $\frac{2\pi b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{9\sin^2\alpha\cos\alpha}=144{,}3$. **1898.** $\frac{\pi a^3\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\cos^3\frac{\alpha}{2}}=120\,900$.

1899. $\frac{4l^3}{3\sin\beta}\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=1290\ дм^3$. **1900.** $\frac{\pi}{4}S\operatorname{tg}\alpha$, $0^\circ<\alpha\leqslant 45^\circ$.

1901. $\frac{\pi\sqrt{2}b^3\sin^3 2\alpha}{128\cos^3(\alpha-45^\circ)}$. **1902.** $\pi r^2\operatorname{cosec}^4\frac{\alpha}{2}$. **1903.** $\frac{12l^2\sin^2\beta}{(\sqrt{2}+\operatorname{tg}\beta)^2}$.

1904. $\frac{9R^3\sin^3\alpha}{32\cos^3(\alpha-30^\circ)}$, $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$. Наибольший объём призмы равен $\frac{9R^3}{4}$ (при $\alpha=90^\circ$), наименьший — равен 0 (при $\alpha=0^\circ$).

1905. $\frac{n\sin\alpha\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}}{12\cos^3\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^3\cos\alpha}{2\pi^3}}$.

1906. $\frac{1}{3}r^3\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=890{,}6\ дм^3$.

1907. $\frac{2}{3}l^3\frac{\sin^2\beta\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}=188{,}2\ дм^3$.

1908. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}\sin^3\alpha}{32\sin^3(45^\circ+\alpha)}=110{,}4\ м^3$.

1909. $\frac{4l^2\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)=2446\ см^2$.

1910. $\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **1911.** $2\arcsin\frac{2}{\sqrt{n}}$.

1912. Части поверхности шара равны $S\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ и $S\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; площадь сечения равна $\frac{S}{4}\cos^2\alpha$.

1913. $\frac{\sqrt{2}}{24}\pi d^3\operatorname{cosec}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **1914** $\frac{\pi h^2}{\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$.

1915. $4\pi R^2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\alpha}{2}=132{,}1\cdot 10^6\ км^2$.

1916. $8\pi R^2 \sin\frac{\beta-\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\beta+\alpha}{4} = 46{,}46\ м^2$. **1917.** $\frac{4}{3}\pi h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\cos^3\frac{\alpha}{2}}$.

1918. $\frac{\pi H^3}{6\sin^4\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{\pi H^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **1919.** $\frac{\pi b^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **1920.** $\frac{4}{3}\pi R^3\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

1921. $\frac{\pi r^2}{\cos^2\frac{\alpha}{4}} = 672{,}2\ дм^2$; $\frac{\pi r^3\sin\frac{\alpha}{4}}{6\cos^3\frac{\alpha}{4}}\cdot\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 641{,}2\ дм^3$.

1922. $\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{6V\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi}} = 3{,}448\ см$. **1923.** $\pi S\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$; $2\pi S\sin^2\frac{\alpha}{4}\cdot\operatorname{cosec}\alpha$.

1924. $\frac{4}{3}\pi R^3\cos^4\alpha$. **1925.** $8a^2\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = 2944\ м^2$.

1926. $\pi a^2\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right) = 162{,}7\ дм^2$. **1927.** $\frac{S\sqrt{S}\operatorname{tg}\alpha}{48\sin^6\frac{\alpha}{2}}$. **1928.** $\frac{Q}{4}\sec^4\frac{\alpha}{2}$.

1929. $\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **1930.** $\frac{1}{2}a\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

1931. $2\sqrt{3}r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\alpha$; $\frac{2}{\sqrt{3}}r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

1932. $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$. **1933.** $b\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

1934. $\frac{\pi V}{\sin^2 2\alpha\cdot\sin^2\alpha} = 4{,}447\ м^3$. **1935.** $\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

1936. $4R^2\sin 2\alpha = 1{,}714\ м^2$.

1937. $\frac{b\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$, если $0^\circ < \alpha \leqslant 45^\circ$ и $-\frac{b\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$, если $45^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$.

1938. $\frac{\pi b^2}{\cos^2\varphi}$, где $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **1939.** $\frac{\pi H^3}{6\cos^6\varphi}$, где $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

1940. $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\varphi\cdot\sin^2\varphi\cdot\sin\alpha = 6977\ см^3$.

1941. $2R\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{-2\cos 2\alpha}$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. **1942.** $\frac{4\pi a^2}{3\sin^2 2\alpha}$.

1943. $\frac{a(1+3\cos^2\alpha)}{2\sin\alpha}$. **1944.** $0{,}5\sqrt{3}R^3\sin^2\alpha\cdot\sin^2 2\alpha$.

1945. $\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$; $\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\cos\alpha}}$.

1946. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}}$;

$\frac{a}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}$.

1947. $\frac{2\pi\sin^2\alpha}{3\sqrt{3}(4-\sin^2\alpha)}$. **1948.** $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}}\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$.

1949. $\frac{8R^2\sin\alpha\cdot\sin(45^\circ+\beta)}{\cos 45^\circ\cdot\cos^2\beta}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}=536{,}3\ дм^2$.

1950. $2\sqrt{3}R\sin\alpha$; $2R\sqrt{\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}}$. **1951.** $2\pi r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\alpha=892{,}8\ дм^2$.

1952. $\frac{K}{3}\sqrt{\frac{K}{\pi}}\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **1953.** $-\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}^3\alpha$.

1954. $\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. **1955.** $2\sqrt{\frac{F}{\pi}}\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

1956. $\frac{8S}{3}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\sin^6\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha=2{,}002\ дм^3$. **1957.** $\operatorname{tg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos^3\alpha=0{,}3453$.

1958. $2S\sin\alpha\operatorname{tg}^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sec^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=15{,}60\ см^2$.

1959. $\frac{S}{2}\operatorname{ctg}^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$;

$\frac{S}{24}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\operatorname{ctg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **1960.** $Q\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha=411{,}9\ см^2$.

1961. $\frac{1}{3}\pi R^3\sin^3\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2124\ см^3$. **1962.** $\frac{V}{2}\sin^2\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

1963. $\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2\alpha=0{,}2963$.

1964. $\frac{1}{2\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}\cdot\sqrt[6]{\frac{S^3\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi^3}}=4{,}744\ см$.

1965. $-\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{tg}\alpha\cdot\sec^3 2\alpha$. **1966.** $\frac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}$; $\frac{8\pi r^3\cos^2\varphi}{3\sin^2\alpha}$, где $\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin\alpha$.

1967. $\frac{S}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **1968.** $\frac{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$. **1969.** $\frac{\pi S}{\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{4}}$.

1970. $\frac{\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$. **1971.** $4V\cos^6\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\alpha}{2}$.

1972. $\dfrac{S\cos^2\frac{\alpha}{4}}{\cos^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$. **1973.** $\dfrac{8\pi r^3\cos^6\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{3\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{4}}$. **1974.** $\dfrac{S}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$;

$\dfrac{S}{2}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{4}$. **1975.** $\dfrac{2\pi r^3}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **1976.** $0{,}5\pi R^3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1977. $S\sin\frac{\alpha}{2}$; $\dfrac{S}{6}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}\sin\alpha\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$. **1978.** $8l^2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1979. $\dfrac{\pi H^2\cos^2\beta}{\cos^4\frac{\beta}{2}}$; $\dfrac{\pi H^3\operatorname{ctg}^2\beta}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **1980.** $\dfrac{4}{3}r^3\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{-\cos\alpha}$.

1981. $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{Q^3}{\pi_0}}\cdot\sin^3 2\alpha\cdot\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$; $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{Q^3}{\pi}}$; $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{Q^3}{\pi}}\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

1982. $\dfrac{2}{3}\pi R^3\operatorname{tg}2\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. **1983.** $0{,}5\,l\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}\cdot\sin\alpha}$.

1984. $2\pi a^3\sin\alpha\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$; $8\pi a^2\cos\dfrac{\alpha}{2}$. **1985.** $2\pi a^3\sin\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; $8\pi a^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1986. $0{,}5\pi d^3\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; $2\pi d^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **1987.** $\dfrac{4}{3}\pi\sqrt{S^3\sin 2\alpha}=5406$ *см*³.

1988. $\dfrac{\pi c^2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}=920{,}6$. **1989.** $\dfrac{\pi m^3\sin^2 2\alpha}{96\cos^6\frac{\alpha}{2}}$. **1990.** $\dfrac{\pi a^3\cdot\sin^2 B\cdot\sin(A+B)}{3\sin A}$.

1991. $4\pi L^2\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1331$ *см*²; $\pi L^3\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=3414$ *см*³.

1992. $\dfrac{2\pi a^2}{\cos\alpha}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=15180$ *дм*²; $\dfrac{\pi a^3}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

1993. $2\pi a^2\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$; $\dfrac{1}{6}\pi a^3\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

1994. $\dfrac{\pi h^3\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\alpha\cdot\sin\beta}$; $\dfrac{2\pi h^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

1995. $\dfrac{\pi a^2\sin\alpha\sin\beta\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin(\beta+\alpha)\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}=11010$ *см*².

1996. $\dfrac{\pi}{6}a^3\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}=238\,500$.

1997. $\dfrac{2}{3}\pi b^3\operatorname{tg}\alpha\cdot\sec\alpha\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-15^\circ\right)=1769$ *дм*³.

1998. $\dfrac{8}{3}\pi R^3\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(15^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos\left(15^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)=9232$.

1999. $\dfrac{\pi b^3\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{12\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}=248{,}5$.

Александр Иванович Худобин и Николай Иванович Худобин
Сборник задач по тригонометрии

Редактор *С. В. Пазельский* Технический редактор *М. Д. Петрова*

Сдано в набор 13 IV 1955 г. Подп. к печ. 23/VII 1955 г. Формат бумаги 60×92¹/₁₆.
Печ. л. 13. Уч.-изд. л. 13,71. Цена без переплета 3 р. 70 к. Переплет 80 к.
А-03761. Тираж 85 тыс. экз. Заказ 670.

Отпечатано с матриц типографии Госэнергоиздата, Москва, Шлюзовая набережная, 10, в типографии имени Сталина, Минск, проспект имени Сталина, 105.